Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu Analysis I
WS 2007/08, 20.11.2007

Aufgabe 21 Es sei (a_n) eine Folge. Zeigen Sie:

a) Konvergieren die Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}) gegen $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch (a_n) gegen a.

b) Konvergieren die Teilfolgen (a_{2k}), (a_{2k-1}) und (a_{3k}), dann konvergiert auch (a_n).

Aufgabe 22

a) Beweisen Sie für beschränkte Folgen (a_n) und (b_n), dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

b) Berechnen Sie den Limes inferior und den Limes superior von $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n^2} + n4^{(-1)^n n}}$.

Aufgabe 23 Für $-1 < \rho < 1$ sei die Folge (a_n) rekursiv durch $a_0 = 1$ und

$$\begin{aligned} a_{3k+1} &= \rho a_{3k} \\ a_{3k+2} &= \rho + a_{3k+1} \\ a_{3k+3} &= 1 + \rho a_{3k+2} \end{aligned}$$

definiert.

a) Leiten Sie eine Rekursionsformel für $x_n = a_{3n}$ her.

b) Zeigen Sie, dass (x_n) konvergiert und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Berechnen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 24 Berechnen Sie die Reihenwerte von:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$$

Problem der Woche Berechnen Sie für $p \in \mathbb{N}$ und $p \ge 2$ den Reihenwert von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{p}}.$$

`Hinweis:` Beachten Sie, dass $\dfrac{1}{(n+p-1)!} - \dfrac{n+1}{(n+p)!} = \dfrac{p-1}{(n+p)!}$ gilt.

Abgabe: Dienstag, 27.11.2007, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`