Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

9. Übungsblatt zu Analysis I
WS 2007/08, 11.12.2007

Aufgabe 32 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und fertigen Sie jeweils eine qualitative Skizze an:

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 & , x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^3} & , x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = x[x] \quad (x \in \mathbb{R})$

Aufgabe 33 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit (Skizze!):

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x^7 - x}{x^2 - 1}, \quad I = (-1, 1)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad I = (0, 1]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad I = [1, \infty)$

Aufgabe 34

a) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0,1]$ existiert mit $f\left(\xi + \dfrac{1}{10}\right) - f(\xi) = \dfrac{1}{10}$.

b) Ein Auto fährt in 5 Stunden eine Strecke von 500 Kilometern. Zeigen Sie, dass es ein Zeitintervall von einer Stunde gibt, in dem das Auto genau 100 Kilometer zurücklegt.

Aufgabe 35 Zeigen Sie, dass das Bild eines kompakten Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ unter einer stetigen, nicht konstanten Funktion ein kompaktes Intervall ist.

Aufgabe 36 (Zur Wiederholung)
Es sei A eine nichtleere, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

a) Drücken Sie $\inf\{a - b : a, b \in A\}$ durch $\inf A$ und $\sup A$ aus.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $B := \{a^2 : a \in A\}$ nach oben beschränkt ist mit $\sup B = \max\{(\inf A)^2, (\sup A)^2\}$

Aufgabe 37 Versetzen Sie sich in unsere Lage! Stellen Sie sich vor, Sie sollten ein Übungsblatt für die Weihnachtsferien erstellen, welches die wichtigsten Themen des bisherigen Stoffes behandelt. Erstellen Sie Aufgaben, welche (Ihrer Meinung nach) auf ein solches Übungsblatt gehören.

Problem der Woche Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (das heißt f ist $1-$periodisch). Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Abgabe: Dienstag, 18.12.2007, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`