10. Übungsblatt zu Analysis I
WS 2007/08, 18.12.2007

Aufgabe 36 Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz im Intervall I:

a) $f_n(x) = \begin{cases} nx & , 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & , \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} \\ 0 & , \frac{2}{n} \le x \le 2 \end{cases}, \quad I = [0,2]$

b) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}, \quad I = \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^3}, \quad I = [q,1],$ mit $q \in [0,1)$

Fertigen Sie zu Aufgabenteil a) eine Skizze an!

Aufgabe 37 Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf gleichmäßige Konvergenz in I:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}, \quad I = \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}, \quad I = [q,\infty], \quad (q > 0)$

Aufgabe 38 Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n : I \to J$ gegeben. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiere im Intervall I gleichmäßig gegen $f : I \to J$. Es sei g eine Funktion mit Definitionsbereich J.

a) Zeigen Sie: Ist g Lipschitz-Stetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$, so konvergiert die Funktionenfolge $(g(f_n))$ gleichmäßig gegen $g(f)$.

b) Gilt die Aussage aus Aufgabenteil a), falls g nur gleichmäßig stetig oder nur stetig ist?

Aufgabe 39 Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 100^n x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{(3+2(-1)^n)^n} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{8^n+5} x^{3n+1}$

Aufgabe 40 Es seien $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 4a_{n-1}$ und $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius r.

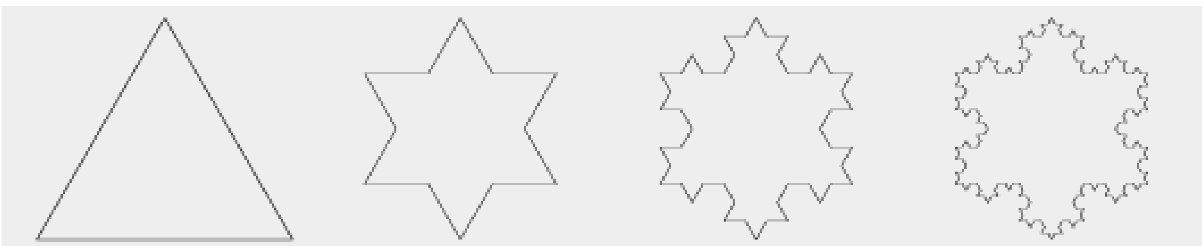
a) Zeigen Sie $0 < a_n \le 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und bestimmen Sie eine erste Abschätzung für den Konvergenzradius r.

b) Berechnen Sie f explizit im Intervall $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

c) Finden Sie eine bessere Abschätzung als $r \geq \frac{1}{4}$.

Problem der Woche An einem weihnachtlichen Fenster wächst eine Eisblume nach folgendem rekursiven Bildungsgesetz:
Die Ausgangsfigur T_0 ist ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1. Die Berandung von T_{n+1} entsteht aus der von T_n, indem auf dem mittleren Drittel einer jeden gradlinigen Berandungsstrecke von T_n ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird.
Berechnen Sie den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n von T_n und zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} F_n < \infty$$



Das Analysis I Team wünscht Ihnen ein erfolgreiches und schönes Jahr 2008

Abgabe: Dienstag, 8.01.2008, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`