Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

# 11. Übungsblatt zu Analysis I
# WS 2007/08, 8.1.2008

**Aufgabe 41** Es sei $(a_n)$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx}$ stetig und streng monoton fallend ist.

b) Bestimmen Sie das Intervall $f([0, \infty))$.

**Aufgabe 42** Bestimmen Sie für die Funktion $\tanh x = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ explizit die Koeffizienten $a_n$ und $b_n$ in den Entwicklungen:

a) $\tanh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2nx}$ in $(-\infty, 0)$ und

b) $\tanh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-2nx}$ in $(0, \infty)$

**Aufgabe 42** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ für $x > 0$ (Hinweis: Es gilt $x^a = e^{a \log x}$)

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left( \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x} \right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x} + x^3 - x}{e^x \sinh x}$

**Aufgabe 43**

a) Stellen Sie $\cos 3x$ und $\sin 3x$ durch $\cos x$ und $\sin x$ dar, indem Sie $e^{3ix} = (e^{ix})^3$ und die Eulersche Formel anwenden.

b) Berechnen Sie die dritten Wurzeln aus $i$.

**Problem der Woche** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(0) > 0$ gelte. Zeigen Sie:

$$f(1) > 0 \text{ und } f(x) = f(1)^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für natürliche und ganze Zahlen $x$, dann für rationale $x$ und zuletzt für $x \in \mathbb{R}$.

**Abgabe**: Dienstag, 15.01.2008, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`