

12. Übungsblatt zu Analysis I

WS 2007/08, 15.1.2008

Aufgabe 44 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ erklärte Funktion.

- a) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.
- b) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R})$ und skizzieren Sie den Graphen von f .
- c) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f und skizzieren Sie deren Graphen.

Aufgabe 45 Bestimmen Sie für die Funktionen f die Koeffizienten a_0, \dots, a_5 ihrer Potenzreihenentwicklung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:

a) $f(x) = e^{\cos x} - 1$ b) $f(x) = \tanh x$

Aufgabe 46 Bestimmen Sie jeweils alle Punkte aus \mathbb{R} , in denen f stetig bzw. differenzierbar ist, und bestimmen Sie ggf. die Ableitung:

a) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$ b) $f(x) = x|x|$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{1 + |x|}$

Aufgabe 47 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-1} - e^x}{\sin \pi x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) \sin x - x^3}{(e^{x^2} - 1)^2 \sinh x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cosh 2x}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x}$

(Hinweis: Verwenden Sie Potenzreihen!)

Aufgabe 48 Betrachten Sie den zentralen Differentialquotienten.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

- a) Es sei f differenzierbar in x . Zeigen Sie, dass der zentrale Differentialquotient existiert und mit der Ableitung an der Stelle x übereinstimmt.
- b) Angenommen der zentrale Differentialquotient existiert für f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Ist f in x differenzierbar? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Problem der Woche Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive und differenzierbare Funktion und $c > 0$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ die x -Achse im Punkt $x_0 - c$ schneidet.

- a) Bestimmen Sie eine Funktion f mit dieser Eigenschaft.
- b) Bestimmen Sie alle Funktionen f mit dieser Eigenschaft.