Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

13. Übungsblatt zu Analysis I
WS 2007/08, 22.1.2008

Aufgabe 49 Es sei f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Zwischen zwei Nullstellen von f liegt eine Nullstelle von f'.

b) Ist $f \in C^n(\mathbb{R})$ und hat $f^{(n)}$ höchstens k Nullstellen, so hat f höchstens $k+n$ Nullstellen.

c) Die Gleichung $2^x = 1 + x^2$ hat genau 3 Lösungen.

Aufgabe 50 Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz die folgenden Ungleichungen:

a) $\tan x > x$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und b) $\frac{x}{1+x^2} \le \arctan x \le x$ für $x \ge 0$

Aufgabe 51 Es sei $f(x) = \sin x$.

a) Zeigen Sie, dass für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ genau ein $\xi = \xi(x) \in (0, x)$ existiert mit

$$\frac{\sin x}{x} = f'(\xi) = \cos(\xi).$$

b) Dieses ξ hängt von x ab. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{x}$.

Aufgabe 52 Berechnen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Ableitung von $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und zeigen Sie damit:

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 53 Es sei $f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Zeigen Sie:

a) Im Intervall $(-1, 1)$ ist f differenzierbar, streng monoton wachsend und die Umkehrfunktion f^{-1} existiert.

b) Die Funktion $f^{-1}(y) = \operatorname{Artanh} y$ ist differenzierbar und es gilt: $\operatorname{Artanh}' y = \frac{1}{1-y^2}$.

c) Es gilt: $\operatorname{Artanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$.

Problem der Woche Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ sowie $f'(0) = 0$ und $f'(1) = 0$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in (0, 1)$ existiert mit $|f''(\xi)| \ge 2$.

Abgabe: Dienstag, 29.01.2008, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`