Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

14. Übungsblatt zu Analysis I
WS 2007/08, 29.1.2008

Aufgabe 54 Zeigen Sie, dass folgende Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind:

a) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ b) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \cos kx}{k!}$

`Hinweis:` Betrachten Sie in Aufgabenteil b) die Intervalle $[-q, q]$, $q > 0$.

Aufgabe 55 Es sei $f(x) = \sqrt[4]{x}$ und $x_0 = 2$.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt x_0.

b) Für welche x stimmt die Funktion f mit ihrer Taylorreihe überein?

Aufgabe 56 Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 57 Es sei $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$.

a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f''(x) = -\frac{1}{4} f(x)$ erfüllt ist.

b) Bestimmen Sie $T_2(x, 0)$ von f.

c) Zeigen Sie $|T_2(x,0) - f(x)| \le \frac{|x|^3}{48}$ für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Aufgabe 58 Es sei $f(x) = e^{3x} + e^x - 2$.

a) Zeigen Sie, dass f eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt und bestimmen Sie deren Definitionsbereich.

b) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f^{-1} in 0 und bestimmen Sie damit $T_2(x, 0)$ von f^{-1}.

Problem der Woche Es sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^2 x}{2^k}$. Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist, die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ aber ausschließlich in x_0 konvergiert.

Abgabe: Dienstag, 5.02.2008, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`