# Musterlösung zu Blatt 1

## Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

**1 a)** Negation: Es gibt eine Ziehung der Lottozahlen, bei der niemand eine Million Euro gewinnt.
Die Aussage ist wohl falsch.

**b)** Negation: $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R}\colon\ x \neq y^2$.
Die Aussage ist falsch, denn sie gilt nicht für negative $x \in \mathbb{R}$.

**c)** Negation: $\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in \mathbb{R}\colon\ |x| < \delta\ \wedge\ x^2 \geq \varepsilon$.
Die Aussage ist wahr, denn zu gegebenem $\varepsilon > 0$ läßt sich $\delta := \sqrt{\varepsilon} > 0$ wählen (Bedeutung der Aussage: die Funktion $x \mapsto x^2$ ist im Nullpunkt stetig).

**2 a)**
$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap B\ \vee\ x \in C \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A\ \wedge\ x \in B)\ \vee\ x \in C \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A\ \vee\ x \in C)\ \wedge\ (x \in B\ \vee\ x \in C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \cup C)\ \wedge\ (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

**b)**
$$\begin{aligned} x \in C \backslash (A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in C\ \wedge\ x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in C\ \wedge\ (x \notin A\ \vee\ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in C\ \wedge\ x \notin A)\ \vee\ (x \in C\ \wedge\ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in C \backslash A)\ \vee\ (x \in C \backslash B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (C \backslash A) \cup (C \backslash B) \end{aligned}$$

**3 a)** Die Aussage ist wahr, denn sind $m$ und $n$ gerade, so existieren $r, s \in \mathbb{N}$ mit $m = 2r$ und $n = 2s$. Dann ist $m \cdot n = 4rs = 2 \cdot 2rs$ mit $2rs \in \mathbb{N}$ und somit gerade.

**b)** Die Aussage ist falsch, denn sie gilt zum Beispiel nicht für $m = 2$ und $n = 1$.

**c)** Die Aussage ist wahr, denn:

**Annahme:** $\forall k \in \mathbb{N}\colon\ n \neq 2k$

Dann ist $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$n^3 \ = \ (2k-1)^3 \ = \ 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1 \ = \ 2(4k^3 - 6k^2 + 3k) - 1$$

mit $4k^3 - 6k^2 + 3k \in \mathbb{N}$, d.h. $n^3$ ist ungerade. **Widerspruch!**

Also ist $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und somit gerade.

**4 a)** **1. Fall:** $x \geq 0$:

$$x + 1 \ \leq \ 2x \ \leq \ x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \ \leq \ x \ \leq \ 2$$

**2. Fall:** $x < 0$:

$$x + 1 \ \leq \ -2x \ \leq \ x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \ \leq \ -3x \ \leq \ 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \ \geq \ x \ \geq \ -\frac{2}{3}$$

Die Lösungsmenge ist also $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}] \cup [1, 2]$.

b) **1. Fall:** $5x+3 \geq 0$ und $3x-2 \geq 0$

Die Bedingung ist äquivalent zu $x \geq -\frac{3}{5}$ und $x \geq \frac{2}{3}$, also $x \geq \frac{2}{3}$. Dann gilt:

$$5x+3-(3x-2) \;\geq\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+5 \;\geq\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad x \;\geq\; 0$$

Insgesamt ist die Aussage äquivalent zu $x \geq \frac{2}{3}$.

**2. Fall:** $5x+3 \geq 0$ und $3x-2 < 0$

Die Bedingung ist äquivalent zu $x \geq -\frac{3}{5}$ und $x < \frac{2}{3}$. Dann gilt:

$$5x+3+(3x-2) \;\geq\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad 8x+1 \;\geq\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad x \;\geq\; \frac{1}{2}$$

Insgesamt ist die Aussage äquivalent zu $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$.

**3. Fall:** $5x+3 < 0$ und $3x-2 \geq 0$

Die Bedingung ist äquivalent zu $x < -\frac{3}{5}$ und $x \geq \frac{2}{3}$, kann also von keinem $x \in \mathbb{R}$ erfüllt werden.

**4. Fall:** $5x+3 < 0$ und $3x-2 < 0$

Die Bedingung ist äquivalent zu $x < -\frac{3}{5}$ und $x < \frac{2}{3}$, also $x < -\frac{3}{5}$. Dann gilt:

$$-(5x+3)+(3x-2) \;\geq\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad -2x-5 \;\geq\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad x \;\leq\; -5$$

Insgesamt ist die Aussage äquivalent zu $x \leq -5$.

Die Lösungsmenge ist also $(-\infty, -5\,] \cup [\,\frac{1}{2}, \infty)$.

sawo