Musterlösung zu Blatt 2

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

5 a) 1. Fall: $a \geq b$

Dann ist einerseits $\max\{a,b\} = a$ und andererseits:

$$\tfrac{1}{2}(a+b+|a-b|) \;=\; \tfrac{1}{2}(a+b+(a-b)) \;=\; a$$

2. Fall: $a < b$

Dann ist einerseits $\max\{a,b\} = b$ und andererseits:

$$\tfrac{1}{2}(a+b+|a-b|) \;=\; \tfrac{1}{2}(a+b-(a-b)) \;=\; b$$

Insgesamt folgt die Behauptung.

b) 1. Fall: $a \geq b$

Dann ist einerseits $\min\{a,b\} = b$ und andererseits:

$$\tfrac{1}{2}(a+b-|a-b|) \;=\; \tfrac{1}{2}(a+b-(a-b)) \;=\; b$$

2. Fall: $a < b$

Dann ist einerseits $\min\{a,b\} = a$ und andererseits:

$$\tfrac{1}{2}(a+b-|a-b|) \;=\; \tfrac{1}{2}(a+b+(a-b)) \;=\; a$$

Insgesamt folgt die Behauptung.

6 a) Nach 2.3 der Vorlesung gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$$

und es folgt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \;=\; 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \;=\; 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n \;=\; n^2$$

b) Nach 2.3 und 2.4 der Vorlesung gelten die Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

und es folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 \;&=\; \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) \;=\; 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&=\; 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n \\
&=\; n\left(\frac{2}{3}(n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1\right) \\
&=\; n\left(\frac{4}{3}n^2 - \frac{1}{3}\right) \;=\; \frac{n}{3}(4n^2-1)
\end{aligned}$$

7 a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{k}-\tfrac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\tfrac{1}{k} \qquad \text{(Index-Transformation)}\\
&= 1+\sum_{k=2}^{n}\tfrac{1}{k}-\left(\sum_{k=2}^{n}\tfrac{1}{k}+\tfrac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\tfrac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

b) Nach einer Index-Transformation liefert die geometrische Summenformel (siehe 2.5):

$$\sum_{k=2}^{n+2}2^{k-2} = \sum_{k=0}^{n}2^{k} = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$$

8 Die Ungleichung gilt nicht für $n=1$, wie durch Einsetzen zu sehen ist:

$$3^{2^1} = 3^2 = 9 \not< 8 = 2^3 = 2^{3^1}$$

Die Ungleichung gilt für $n \geq 2$, was mittels vollständiger Induktion bewiesen werden kann:

$\boldsymbol{n=2}$: $3^{2^2} = 3^4 = 81 < 512 = 2^9 = 2^{3^2}$ ✓

$\boldsymbol{n \to n+1}$: $3^{2^{n+1}} = 3^{2^n \cdot 2} = \left(3^{2^n}\right)^2 \overset{(I.V.)}{<} \left(2^{3^n}\right)^2 < \left(2^{3^n}\right)^3 = 2^{3^n \cdot 3} = 2^{3^{n+1}}$ ✓

Bemerkung:

Die oben benutzte Notation ist eine abkürzende Schreibweise. Dabei steht „$n=2$" für „Zeige den Induktionsanfang $A(2)$." und „$n \to n{+}1$" für „Es gelte die Induktionsvoraussetzung (I.V.) $A(n)$. Zeige, dass $A(n+1)$ gilt." Das Häkchen bedeutet „Also gilt $A(2)$." bzw. „Also gilt $A(n+1)$."

sawo