Musterlösung zu Blatt 3

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

9 Die Ungleichung gilt für $n = 1$ und für alle $n \geq 5$. Für $n = 2, 3, 4$ gilt die Ungleichung nicht. Der Beweis für $n \leq 4$ erfolgt durch Einsetzen und für $n \geq 5$ mittels volständiger Induktion.

$\boldsymbol{n = 5}$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ ✓

$\boldsymbol{n \to n+1}$:

Es gilt:

$$2^{n+1} \;=\; 2 \cdot 2^n \;>\; 2 \cdot n^2 \;>\; n^2 + 2n + 1 \;=\; (n+1)^2$$

Dabei folgt die erste Ungleichung mit der Induktionsvoraussetzung und die zweite so:

$$2n^2 \;>\; n^2 + 2n + 1 \quad\Leftrightarrow\quad n^2 - 2n \;>\; 1 \quad\Leftrightarrow\quad n(n-2) \;>\; 1$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich für alle $n \geq 3$ erfüllt.

10 **1. Fall:** $y \geq -1$

In diesem Fall ist ein Beweis mittels vollständiger Induktion möglich.

$\boldsymbol{n = 1}$: $1 + y \geq 1 + y$ ✓

$\boldsymbol{n \to n+1}$:
$$\begin{aligned}
(1+y)^{n+1} &= (1+y)(1+y)^n \\
&\overset{(I.V.)}{\geq} (1+y)(1+ny) \qquad (\text{da } 1+y \geq 0) \\
&= 1 + y + ny + ny^2 \\
&\geq 1 + y + ny \qquad\qquad (\text{da } ny^2 \geq 0) \\
&= 1 + (n+1)y
\end{aligned}$$

2. Fall: $-2 \leq y \leq -1$

Für $n = 1$ ist die Behauptung klar (siehe 1. Fall). Für $n \geq 2$ folgt unter Anwendung von $n(y+1) \leq 0 \Leftrightarrow ny \leq -n$:

$$1 + ny \;\leq\; 1 - n \;\leq\; -1 \;\leq\; (1+y)^n$$

Dabei gilt die letzte Ungleichung wegen $-1 \leq 1 + y$ für $-2 \leq y \leq -1$.

11 a) Mit Hilfe der binomischen Formel folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k \;=\; (1+1)^n \;=\; 2^n$$

b) Mit Hilfe der binomischen Formel folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-1)^k \;=\; (1-1)^n \;=\; 0$$

12 a) Es gibt $10 \cdot 9 = 90$ mögliche Tanzpaare.

b) Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$. Damit ergibt sich für die gesuchte Anzahl der möglichen Mehrheiten:

$$
\begin{aligned}
& \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \\
= \; & \binom{10}{4} + \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + \binom{10}{0} \\
= \; & \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} + \frac{10}{1} + 1 \\
= \; & 210 + 120 + 45 + 10 + 1 \\
= \; & 386
\end{aligned}
$$

sawo