Musterlösung zu Blatt 4

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

13 a) Die Funktionalgleichung

$$\sin(r+t) \;=\; \sin r\,\cos t + \cos r\,\sin t$$

liefert mit $r := t := \frac{s}{2}$ unmittelbar:

$$\sin s \;=\; \sin\frac{s}{2}\,\cos\frac{s}{2} + \cos\frac{s}{2}\,\sin\frac{s}{2} \;=\; 2\sin\frac{s}{2}\,\cos\frac{s}{2}$$

b) Die Funktionalgleichung

$$\cos(r+t) \;=\; \cos r\,\cos t - \sin r\,\sin t$$

liefert mit $r := t := \frac{s}{2}$ unmittelbar:

$$\cos s \;=\; \cos^2\frac{s}{2} - \sin^2\frac{s}{2}$$

- Die Funktionalgleichung

$$\sin(s+t) \;=\; \sin s\,\cos t + \cos s\,\sin t$$

liefert mit $t := 2s$ und den Teilen a), b):

$$\begin{aligned}\sin(3s) &= \sin s\,\cos(2s) + \cos s\,\sin(2s)\\ &= \sin s\,(\cos^2 s - \sin^2 s) + \cos s \cdot 2\sin s\,\cos s\\ &= 3\sin s\,\cos^2 s - \sin^3 s\end{aligned}$$

- Die Funktionalgleichung

$$\cos(s+t) \;=\; \cos s\,\cos t - \sin s\,\sin t$$

liefert mit $t := 2s$ und den Teilen a), b):

$$\begin{aligned}\cos(3s) &= \cos s\,\cos(2s) - \sin s\,\sin(2s)\\ &= \cos s\,(\cos^2 s - \sin^2 s) - \sin s \cdot 2\sin s\,\cos s\\ &= \cos^3 s - 3\sin^2 s\,\cos s\end{aligned}$$

14 a) Wegen $f(x) = x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist $f^{-1}(M) = \{0\}$ und somit $f(f^{-1}(M)) = f(\{0\}) = \{0\}$. Desweiteren ist $f(M) = [0,\infty)$, da $f(x) = x^2 \geq 0$ für alle $x \in M$ gilt und jedes $y \in [0,\infty)$ ein Urbild in M hat, nämlich $x := -\sqrt{y}$. Damit folgt $f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(\,[0,\infty)\,) = \mathbb{R}$, da f keine negativen Werte annimmt.

b) $$\begin{aligned} & y \in f(A \cap B) \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, x \in A \cap B\colon\ f(x) = y \\ \Rightarrow\ & \exists\, x_1 \in A\colon\ f(x_1) = y\ \wedge\ \exists\, x_2 \in B\colon\ f(x_2) = y \quad (\text{mit } x_1 := x_2 := x) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A)\ \wedge\ y \in f(B) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Die umgekehrte Inklusion gilt im Allgemeinen nicht. Ein Gegenbeispiel liefert die konstante Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Definiere $A := (-\infty, 0)$ und $B := (0, \infty)$. Dann ist $A \cap B = \emptyset$ und somit auch $f(A \cap B) = \emptyset$. Andererseits gilt $f(A) \cap f(B) = \{0\} \neq \emptyset$.

15 a) **1. Möglichkeit:**

Wegen $n^2 \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 + n^2 \ \geq\ 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \ \leq\ \frac{2}{3 + n^2} \ \leq\ \frac{2}{3+1} \ =\ \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Möglichkeit:

Die Folge ist monoton fallend, denn es gilt

$$\frac{2}{3 + n^2} \ \geq\ \frac{2}{3 + (n+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 + n^2 \ \leq 3 + (n+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \ \leq\ n + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist das erste Folgeglied $\frac{2}{3+1^2} = \frac{1}{2}$ eine obere Schranke, und 0 ist offensichtlich eine untere Schranke der Folge.

b) Wegen $|\sin s| \leq 1$ und $|\cos s| \leq 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|4 \cos n - 3 \sin n^2| \ \leq\ 4|\cos n| + 3|\sin n^2| \ \leq\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \ =\ 7$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) **1. Möglichkeit:**

Nach Beispiel 4.12 f) der Vorlesung ist die Folge (nq^n) für $0 < q < 1$ beschränkt. Mit $q = \frac{1}{2}$ ergibt sich, dass die Folge $\left(\frac{n}{2^n}\right)$ beschränkt ist und somit auch

$$\frac{n^2}{4^n} \ =\ \frac{n}{2^n} \cdot \frac{n}{2^n}$$

als Produkt zweier beschränkter Folgen.

2. Möglichkeit:

Die Folge ist monoton fallend, denn es gilt

$$\frac{n^2}{4^n} \ \geq\ \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad 4n^2 \ \geq\ n^2 + 2n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{3n^2 - 2n}_{=(3n-2)n} \ \geq\ 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist das erste Folgeglied $\frac{1^2}{4^1} = \frac{1}{4}$ eine obere Schranke, und 0 ist offensichtlich eine untere Schranke der Folge.

16 a) $$\begin{aligned} h(x) = h(y) \quad &\Rightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\Rightarrow \quad f(x) = f(y) \qquad \text{(da } g \text{ injektiv)} \\ &\Rightarrow \quad x = y \qquad \text{(da } f \text{ injektiv)} \end{aligned}$$

Also ist h injektiv.

b) Es sei $c \in C$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Desweiteren existiert wegen der Surjektivität von f ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Insgesamt gilt also $h(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, d.h. h ist surjektiv.

c) Die Bijektivität von h folgt unmittelbar aus den Teilen a) und b).

d) $$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad h(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = h(y) \\ &\Rightarrow \quad x = y \qquad \text{(da } h \text{ injektiv)} \end{aligned}$$

Also ist f injektiv.

Es sei $c \in C$ beliebig. Da h surjektiv ist, existiert ein $a \in A$ mit $h(a) = c$. Definiere $b := f(a)$. Dann ist $b \in B$ mit $g(b) = g(f(a)) = h(a) = c$, d.h. g ist surjektiv.

Gegenbeispiele für die umgekehrten Implikationen:

Für die Teile a) – c) kann jeweils das folgende Gegenbeispiel verwendet werden. Definiere Mengen $A := \{a\}$, $B := \{b_1, b_2\}$ (mit $b_1 \neq b_2$), $C := A$ und die Abbildungen f, g durch $f(a) := b_1$ und $g(b_i) := a$ für $i = 1, 2$. Dann ist $h = I_A$ bijektiv, aber f ist nicht surjektiv und g ist nicht injektiv.

Als Gegenbeispiel für Teil d) definiere Mengen $A := \{a\}$, $B := \{b_1, b_2\}$ (mit $b_1 \neq b_2$), $C := B$ und die Abbildungen f, g durch $f(a) := b_1$ und $g := I_B$. Dann ist f injektiv und g surjektiv (sogar bijektiv), aber $h = g \circ f : \{a\} \to \{b_1, b_2\}$ ist nicht bijektiv.

sawo