Musterlösung zu Blatt 5

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

17 Das Intervallhalbierungsverfahren liefert die folgenden Intervalle $J_n = [a_n, b_n]$:

n	a_n	b_n
1	$1,5$	2
2	$1,5$	$1,75$
3	$1,625$	$1,75$
4	$1,6875$	$1,75$
5	$1,71875$	$1,75$
6	$1,71875$	$1,734375$

18 Einsetzen der Gleichungen für a und b in $r^2 = a^2 + b^2$ liefert:

$$r^2 \;=\; (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 \;=\; x^4+y^4+2x^2y^2 \;=\; (x^2+y^2)^2$$

Mit $r \geq 0$ folgt daraus $r = x^2 + y^2$. Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichung $x^2 - y^2 = a$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= r \\ x^2-y^2 &= a \end{aligned}\right] + \quad\Rightarrow\quad 2x^2 \;=\; r+a \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; \pm\sqrt{\frac{r+a}{2}}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= r \\ x^2-y^2 &= a \end{aligned}\right] - \quad\Rightarrow\quad 2y^2 \;=\; r-a \quad\Leftrightarrow\quad y \;=\; \pm\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

Die möglichen Lösungen des Gleichungssystems sind also die vier Paare (x, y) mit x und y von obiger Form, die durch die Wahl der Vorzeichen gegeben sind. Alle vier Paare erfüllen die Gleichung $x^2-y^2 = a$. Nun ist noch zu untersuchen, welche Paare die Gleichung $2xy = b$ erfüllen. Einsetzen der Paare mit gleichem Vorzeichen ergibt:

$$b \;=\; 2xy \;=\; 2\cdot\sqrt{\frac{r+a}{2}}\cdot\sqrt{\frac{r-a}{2}} \;=\; \sqrt{4\cdot\frac{r^2-a^2}{4}} \;=\; \sqrt{b^2} \;=\; |b|$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $b \geq 0$ ist. Einsetzen der Paare mit unterschiedlichem Vorzeichen ergibt:

$$b \;=\; 2xy \;=\; -2\cdot\sqrt{\frac{r+a}{2}}\cdot\sqrt{\frac{r-a}{2}} \;=\; -\sqrt{4\cdot\frac{r^2-a^2}{4}} \;=\; -\sqrt{b^2} \;=\; -|b|$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $b \leq 0$ ist. Ist $b \neq 0$, so gibt es also in jedem Fall genau zwei verschiedene Lösungen des quadratischen Gleichungssystems. Ist $b = 0$ und $a \neq 0$, so gibt es ebenfalls genau zwei verschiedene Lösungen, nämlich (x, y) mit $y = 0$ und $x = \pm\sqrt{a}$ im Falle $a > 0$ bzw. $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{-a}$ im Falle $a < 0$. Ist schließlich $a = b = 0$, so gibt es nur die Lösung $(x, y) = (0, 0)$.

19 Die Formeln ergeben sich als Lösungen des quadratischen Gleichungssystems aus Aufgabe 18 mit $a := \cos s$ und $b := \sin s$. Denn mit Hilfe der Funktionalgleichungen für Sinus und Kosinus ergibt sich:

$$\cos^2 \frac{s}{2} - \sin^2 \frac{s}{2} = \cos s \quad \text{und} \quad 2\cos\frac{s}{2}\sin\frac{s}{2} = \sin s$$

Also ist (x, y) mit $x = \cos \frac{s}{2}$ und $y = \sin \frac{s}{2}$ eine Lösung des quadratischen Gleichungssystems, und diese ist bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Die Lösungen aus Aufgabe 18 mit $r = \sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s} = 1$ ergeben dann die gewünschten Formeln.

Anwenden der obigen Formeln liefert:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Dabei wurde der in den Präsenzübungen hergeleitete Wert $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ verwendet. Dieser kann natürlich auch durch nochmaliges Anwenden der Kosinus-Formel auf $\frac{\pi}{4}$ mit Hilfe des (geometrisch offensichtlichen) Wertes $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ berechnet werden.

20 a) Es gilt:

$$\frac{4n^3 - (-1)^n n^2}{5n + 2n^3} = \frac{4 - (-1)^n \cdot \frac{1}{n}}{\frac{5}{n^2} + 2} \longrightarrow \frac{4 - 0}{0 + 2} = 2 \quad \text{für } n \to \infty$$

Also konvergiert die Folge (a_n) gegen 2.

b) Mit $|\cos s| \leq 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$ folgt

$$\left|\frac{\cos(3n)}{\sqrt{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

nach Satz 6.19. Also konvergiert die Folge (b_n) gegen 0.

c) Es gilt:

$$\frac{n! - 5}{3n^4 + 7^n} = \frac{\frac{n!}{7^n} - \frac{5}{7^n}}{3 \cdot \frac{n^4}{7^n} + 1} \longrightarrow \frac{\infty - 0}{3 \cdot 0 + 1} = \infty \quad \text{für } n \to \infty\,,$$

da $n!$ schneller gegen ∞ strebt als 7^n und 7^n schneller gegen ∞ strebt als n^4 (siehe 6.12 der Vorlesung). Also divergiert die Folge (c_n).

sawo