HD Dr. G. Thäter
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu „Analysis I für Lehramt Gymnasium“
Wintersemester 2007/08

Abgabetermin: Mittwoch, 5.12.07, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 21: Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

a) $a_n := \sin \frac{n\pi}{10}$ **b)** $b_n := n^{-2} \sum_{k=1}^{n} k$ **c)** $c_n := \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 - 1$

Aufgabe 22: Es sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R} \backslash \{3\}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$. Existiert dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 9}{a_n - 3} \; ?$$

Aufgabe 23: Es seien $a_n := n!$, $b_n := n^n$ und $c_n := 2^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen der Vorlesung.

a) (b_n) strebt schneller gegen ∞ als (a_n).

b) (c_n) strebt schneller gegen ∞ als (b_n).

Aufgabe 24: Ein Mensch nimmt täglich 5 mg eines Langzeit-Medikaments zu sich. Im Körper werden pro Tag 40 % des Medikaments abgebaut. Es soll geklärt werden, welche Menge des Medikaments sich nach langer Zeit im Körper befindet.

a) Es bezeichne a_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge des Medikaments (in mg), die sich nach n Tagen im Körper befindet. Es ist also $a_0 = 5$. Finden Sie eine Rekursionsformel für die a_n mit $n \in \mathbb{N}$.

b) Allgemein sei nun zu $0 < s$ und $0 < t < 1$ die Folge (a_n) rekursiv definiert durch $a_0 := s$ und

$$a_n \;:=\; t\,a_{n-1} + s \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) durch $C := \frac{s}{1-t}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert, und berechnen Sie $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
(Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$.)