Musterlösung zu Blatt 6

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

21 a) Wegen

$$\sin\frac{(5+20k)\pi}{10} \;=\; \sin\frac{\pi}{2} \;=\; 1 \qquad \text{und} \qquad \sin\frac{(15+20k)\pi}{10} \;=\; \sin\frac{3}{2}\pi \;=\; -1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ kann das ε-Kriterium von Definition 6.2 für $\varepsilon \leq 1$ offensichtlich nicht erfüllt werden. Also ist die Folge (a_n) divergent.

b) Laut Vorlesung gilt die arithmetische Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt:

$$n^{-2}\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2n^2} \;=\; \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \;\longrightarrow\; \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$. Also konvergiert die Folge (b_n) gegen $\frac{1}{2}$.

c) Durch „geschicktes Ergänzen“ folgt mit Hilfe der 3. Binomischen Formel:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2-1 \;&=\; \sqrt{n^4+n^2+1}-(n^2+1) \\
&=\; \frac{(\sqrt{n^4+n^2+1}-(n^2+1))(\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2+1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2+1} \\
&=\; \frac{n^4+n^2+1-(n^2+1)^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2+1} \\
&=\; \frac{n^4+n^2+1-n^4-2n^2-1}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2+1} \\
&=\; -\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2+1} \\
&=\; -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+1+\frac{1}{n^2}} \;\longrightarrow\; -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Also konvergiert die Folge (c_n) gegen $-\frac{1}{2}$.

22 Der Grenzwert existiert, denn es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-9}{a_n-3} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-3)(a_n+3)}{a_n-3} \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n+3 \;=\; 6$$

23 a) Wegen

$$\frac{n!}{n^n} \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n} \;\leq\; \frac{1}{n} \;\longrightarrow\; 0$$

für $n \to \infty$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$.

b) Wegen

$$n \leq 2^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{2^n} \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (linke Ungleichung folgt aus der Bernoullischen Ungleichung) gilt

$$\frac{n^n}{2^{n^2}} = \left(\frac{n}{2^n}\right)^n \leq \frac{n}{2^n} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$ (nach 6.12), d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0$.

24 a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = a_{n-1} - \frac{2}{5}a_{n-1} + 5 = \frac{3}{5}a_{n-1} + 5$$

b) Die Beschränktheit der Folge lässt sich mittels vollständiger Induktion zeigen, denn es ist $a_0 = s \leq \frac{s}{1-t}$, da $0 < 1-t < 1$ gilt, und der Induktionsschritt von $n-1$ nach n folgt mit Hilfe der Rekursionsformel für a_n:

$$a_n = t\,a_{n-1} + s \overset{(I.V.)}{\leq} t \cdot \frac{s}{1-t} + s = \frac{ts + s(1-t)}{1-t} = \frac{s}{1-t} = C$$

Es folgt dann wiederum mit Hilfe der Rekursionsformel

$$a_n - a_{n-1} = (t-1)a_{n-1} + s \geq (t-1)\cdot C + s = 0$$

und somit die Monotonie der Folge.

c) Nach Theorem 6.21 sind monotone beschränkte Folgen konvergent, und somit folgt die Konvergenz von (a_n) unmittelbar aus Teil b). Desweiteren folgt mit Hilfe der Rekursionsformel für a_n und den Rechenregeln für Grenzwerte

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = t \lim_{n\to\infty} a_{n-1} + s = t\,a + s$$

und somit $a = \frac{s}{1-t}$.

sawo