Musterlösung zu Blatt 7

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

25 a) **zu zeigen:** $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 \colon \, |\sigma_n - a| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (a_n) gegen a konvergiert, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mit $a = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a$ und der Dreiecksungleichung folgt:

$$|\sigma_n - a| \;=\; \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \;\leq\; \frac{1}{n}\underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n_1}(a_k - a)\right|}_{=:C} + \underbrace{\frac{n - n_1}{n}}_{<1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, wobei $n_0 \geq n_1$ so gewählt werde, dass $\frac{C}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt (also $n_0 > \frac{2C}{\varepsilon}$).

b) Definiere (a_n) durch $a_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist (a_n) sicherlich divergent. Desweiteren gilt $\sigma_n = 0$, falls n gerade ist, und $\sigma_n = -\frac{1}{n}$, falls n ungerade ist, in jedem Fall also

$$|\sigma_n| \;\leq\; \frac{1}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{für } n \to \infty\,,$$

d.h. (σ_n) konvergiert gegen Null.

26 a) $x = 0,9911$ und $y = -0,487$

b) $x = 2$ und $y = -2$

Eine kleine Änderung der rechten Seite des Gleichungssystems hat hier eine große Auswirkung auf die Lösung (vgl. 7.7).

27 Für den absoluten Fehler gilt:

$$\Delta\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; \frac{1}{x^*} - \frac{1}{x} \;=\; \frac{x - x^*}{x^* \cdot x} \;=\; -\frac{\Delta(x)}{(x + \Delta(x)) \cdot x}$$

Für den relativen Fehler gilt:

$$\rho\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; \frac{\Delta\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \;=\; -\frac{\Delta(x)}{x + \Delta(x)} \;=\; -\frac{\rho(x)}{1 + \rho(x)}$$

Also ist $\left|\rho\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |\rho(x)| \cdot \frac{1}{1+\rho(x)}$, falls $|\rho(x)| < 1$ ist, d.h. es gilt $\left|\rho\left(\frac{1}{x}\right)\right| \sim |\rho(x)|$.

28 Es sei $a \in (0, \infty)$ und $(x_n) \subseteq (0, \infty) \setminus \{a\}$ eine Folge mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann gilt für den Differenzenquotienten

$$\Delta f(a; x_n) \;=\; \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \;=\; \frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}}{x_n - a} \;=\; \frac{\frac{a - x_n}{x_n \cdot a}}{x_n - a} \;=\; -\frac{1}{x_n \cdot a} \;\longrightarrow\; -\frac{1}{a^2}$$

für $n \to \infty$. Also ist f differenzierbar in a mit Ableitung $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

sawo