Musterlösung zu Blatt 8

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

29 a) Polynomdivision liefert:

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) : (x - 2) \ = \ x^2 - 4x + 4$$

Damit folgt:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} \ = \ \lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 4) \ = \ 0$$

b) Erweitern mit x^4 liefert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}} \ = \ \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1} \ = \ \frac{0 + 0}{0 + 1} \ = \ 0$$

c) Erweitern mit $(x^2\sqrt{x})^{-1}$ liefert:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x + 7)^2 \sqrt{x + 2}}{7x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}} \ = \ \lim_{x \to \infty} \frac{(1 + \frac{7}{x})^2 \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{7 - \frac{2}{x}} \ = \ \frac{(1 + 0)\sqrt{1 + 0}}{7 - 0} \ = \ \frac{1}{7}$$

30 a) Laut Vorlesung ist die Gauß-Klammer-Funktion auf $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ stetig und daher auch f als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Mit dem gleichen Argument ist f in $z \in \mathbb{Z}$ rechtsseitig stetig. Wegen $\lim\limits_{x \to z^-} f(x) = 1 \neq 0 = f(z)$ ist f nicht linksseitig stetig, d.h. f ist in keinem Punkt aus $\mathbb{Z}$ stetig.

b) g ist auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ stetig, da Zusammensetzung stetiger Funktionen. g ist auch im Nullpunkt stetig, denn es gilt $\left|x \cos \frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$ für $x \to 0$.

c) h ist in $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ nicht stetig, denn ist (x_n) eine Folge rationaler Zahlen und (y_n) eine Folge irrationaler Zahlen, die beide gegen x konvergieren, so ist $h(y_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $h(y_n) \to 0$ für $n \to \infty$, aber $h(x_n) = x_n \to x \neq 0$ für $n \to \infty$. h ist im Nullpunkt stetig, denn es gilt $|h(x)| \leq |x| \to 0$ für $x \to 0$.

31 a) Es gilt zwar „$\Rightarrow$", da die Betragsfunktion stetig ist und somit $|f|$ als Komposition stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist, aber „$\Leftarrow$" ist im Allgemeinen falsch. Betrachte zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1$ für alle $x \neq 0$ und $f(0) := -1$. Dann ist $|f| = 1$ stetig, aber f ist nicht stetig in 0.

b) Es gilt zwar „$\Rightarrow$", da das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, aber „$\Leftarrow$" ist im Allgemeinen falsch. Ist zum Beispiel $f = 0$ die (in jedem Punkt stetige) Nullfunktion, so gilt $f \cdot g = 0$ für jede Funktion g, insbesondere also auch, wenn g nicht stetig in a ist.

c) Es gilt „$\Rightarrow$" laut Vorlesung. „$\Leftarrow$" folgt durch Anwenden von „$\Rightarrow$" auf $\frac{1}{f}$.

32 Nach Aufgabe 5 gilt

$$\max\{f, g\}(x) \ = \ \max\{f(x), g(x)\} \ = \ \tfrac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) \quad \text{und}$$

$$\min\{f, g\}(x) \ = \ \min\{f(x), g(x)\} \ = \ \tfrac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit sind $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ als Zusammensetzungen stetiger Funktionen stetig.

sawo