Musterlösung zu Blatt 9

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

33 a) f ist ein Polynom und somit differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Produkt- und Kettenregel liefern:

$$f'(x) \;=\; 2x(x^4-7)^3 + (1+x^2)\cdot 3(x^4-7)^2\cdot 4x^3 \;=\; (14x^5+12x^3-14x)(x^4-7)^2$$

b) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, da Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen (und wegen $x^4+1>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ definiert). Quotienten- und Kettenregel liefern:

$$f'(x) \;=\; \frac{4x\sqrt{x^4+1} - 2x^2\cdot\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} \;=\; \frac{4x}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$$

c) f ist differenzierbar für alle $x>0$, da Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen. Ausmultiplizieren und Ableiten ergibt $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$. f ist aber nicht in $x=0$ differenzierbar, da

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} \;=\; \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h^3)\sqrt{h}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0^+}\frac{1+h^3}{\sqrt{h}} \;=\; \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}+h^{\frac{5}{2}}\right)$$

nicht existiert.

d) f ist differenzierbar für alle $x>0$, da Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen. Mit $f(x)=x^{\frac{7}{2}}$ folgt für die Ableitung $f'(x)=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$ für alle $x>0$. f ist auch in $x=0$ differenzierbar, denn es gilt:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} \;=\; \lim_{h\to 0^+}\frac{h^3\sqrt{h}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0^+}h^2\sqrt{h} \;=\; 0$$

Also ist $f'(0)=0$.

34 Nach Kettenregel gilt:

$$(g\circ f)' \;=\; (g'\circ f)\cdot f'$$

Weiteres Ableiten unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel ergibt dann:

$$(g\circ f)'' \;=\; (g'\circ f)'\cdot f' + (g'\circ f)\cdot f'' \;=\; (g''\circ f)\cdot f'^2 + (g'\circ f)\cdot f''$$

35 Bestimme die lokalen Extrema der Funktion $f(x):=\frac{x^2+1}{x+1}$ auf $(-1,1)$. Die notwendige Bedingung $f'(x)=0$ liefert:

$$f'(x) \;=\; \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2} \;=\; \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2x-1 \;=\; 0$$

Die Bedingung ist äquivalent zu $x=-1\pm\sqrt{2}$. Es ist $-1-\sqrt{2}\notin(-1,1)$. Somit gibt es nur eine kritische Stelle in $x=\sqrt{2}-1\in(-1,1)$. Berechne die zweite Ableitung von f zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung $f''(x)\neq 0$:

$$f''(x) \;=\; \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \;=\; \frac{4}{(x+1)^3} \;>\; 0$$

für alle $x \in (-1,1)$. In $x = \sqrt{2}-1$ liegt somit ein lokales Minimum mit Funktionswert $f(\sqrt{2}-1) = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2$ vor. Wegen

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \;=\; \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \;=\; 1 \;>\; 2\sqrt{2}-2$$

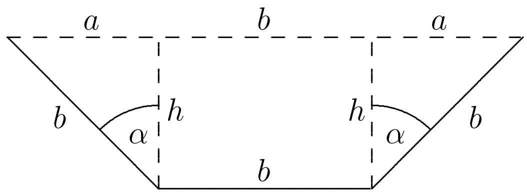
liegt in $x = \sqrt{2}-1$ ein globales Minimum vor. Ein globales Maximum existiert offenbar nicht.

Nach dem Monotoniesatz lässt sich an f' ablesen, auf welchen Intervallen f monoton ist. Es gilt:

$$f'(x) \;=\; \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x+1)^2} \;=\; \underbrace{\frac{x+1+\sqrt{2}}{(x+1)^2}}_{>0} \cdot (x+1-\sqrt{2})$$

Also ist f monoton fallend auf $\big(-1, \sqrt{2}-1\big]$, da dort $f'(x) \leq 0$ gilt, und monoton wachsend auf $\big[\sqrt{2}-1, 1\big)$, da dort $f'(x) \geq 0$ gilt. Die Monotonie ist jeweils strikt, da nur im rechten bzw. linken Randpunkt des Intervalls $f'(x) = 0$ ist.

36 Mit den Bezeichnungen der Skizze



gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sin\alpha \;=\; \frac{a}{b} \quad\Leftrightarrow\quad a \;=\; b\sin\alpha \qquad \text{und} \qquad \cos\alpha \;=\; \frac{h}{b} \quad\Leftrightarrow\quad h \;=\; b\cos\alpha$$

Die Fläche lässt sich in Abhängigkeit vom Winkel α berechnen durch:

$$F(\alpha) \;=\; (a+b)h \;=\; (b\sin\alpha + b)\, b\cos\alpha \;=\; b^2(\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha)$$

Berechne die lokalen Extrema von F auf dem offenen Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Die erste Ableitung von F lautet:

$$F'(\alpha) \;=\; b^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \sin\alpha) \;=\; b^2(1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha)$$

Die notwendige Bedingung $F'(\alpha) = 0$ liefert:

$$1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2} \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\alpha \;=\; -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Da $\sin\alpha \geq 0$ auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist, gibt es nur eine kritische Stelle, nämlich die mit $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, d.h. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Die zweite Ableitung von F lautet:

$$F''(\alpha) \;=\; b^2(-4\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha)$$

Es ist $F''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$, und somit liegt bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ein lokales Maximum mit Funktionswert $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}b^2$ vor. Wegen $F(0) = b^2$ und $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist dies auch das globale Maximum.

sawo