Musterlösung zu Blatt 10

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

37 Polynomdivision liefert:

$$\lim_{x\to 2} \frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \lim_{x\to 2}(x^2+4) \;=\; 8$$

38 **1. Möglichkeit:**

Existieren ganzzahlige Nullstellen, so müssen diese Teiler des konstanten Summanden -2 sein, also ± 1 oder ± 2. Einsetzen dieser Zahlen in $P(x)$ liefert die Nullstelle $x_0 = -2$. Polynomdivision ergibt $P(x) : (x - x_0) = 6x^2 + x - 1$, und die Nullstellen des quadratischen Polynoms sind $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ (p-q-Formel, siehe 5.11).

2. Möglichkeit:

Existieren rationale Nullstellen, so müssen diese nach Satz 12.8 von der Form $\frac{p}{q}$ sein, wobei $p \in \mathbb{Z}$ ein Teiler des konstanten Summanden -2 und $q \in \mathbb{N}$ ein Teiler des Leitkoeffizienten 6 ist. Einsetzen dieser Zahlen in $P(x)$ liefert die Nullstellen x_0, x_1, x_2 (siehe 1. Möglichkeit).

39 a) Es gilt

$$1 \;\leq\; \sqrt[n]{n^5+4n} \;\leq\; \sqrt[n]{n^5+4n^5} \;=\; \sqrt[n]{5}\cdot(\sqrt[n]{n})^5 \;\longrightarrow\; 1$$

für $n\to\infty$ und somit:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+4n} \;=\; 1$$

b) Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$ und somit $\sqrt[n]{n} - 1 \to 0$ für $n\to\infty$. Daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$0 \;\leq\; \sqrt[n]{n} - 1 \;\leq\; \frac{1}{2}$$

Damit folgt

$$0 \;\leq\; \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n \;\leq\; \left(\frac{1}{2}\right)^n \;\longrightarrow\; 0$$

für $n\to\infty$ und somit:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n \;=\; 0$$

c) Es gilt

$$\sqrt[3]{n}\,(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) \;=\; \frac{2\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \;=\; \frac{2\cdot n^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \;\longrightarrow\; \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} \;=\; 0$$

für $n\to\infty$.

40 Definiere $g(x) := x - f(x)$ für $x \in [a,b]$. Dann ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, da Zusammensetzung stetiger Funktionen, und $x_0 \in [a,b]$ ist genau dann Fixpunkt von f, wenn $g(x_0) = 0$ ist. Wegen $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$ gilt $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Ist nun $g(a) = 0$ oder $g(b) = 0$, so ist a bzw. b Fixpunkt. Anderfalls folgt die Existenz eines Fixpunktes x_0 unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz.

sawo