Musterlösung zu Blatt 11

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

41 Zur Bestimmung eines Supremums kann im Folgenden stets die Charakterisierung aus Feststellung 14.3 der Vorlesung und zur Bestimmung eines Infimums eine entsprechende Charakterisierung verwendet werden (siehe Feststellung 14.5).

a) Es ist $M = [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und somit $\sup M = \max M = \sqrt{10}$ und $\inf M = \min M = -\sqrt{10}$.

b) Es ist $M = (-\infty, 3)$ ein offenes, nach oben beschränktes Intervall, also ist $\sup M = 3$ und $\max M$ existiert nicht. Infimum und Minimum existieren ebenfalls nicht, da M nach unten unbeschränkt ist.

c) Für $x \in M$ gilt $1 < x \leq 2$, d.h. M ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und somit existieren Supremum und Infimum. Wegen $2 \in M$ ist $\sup M = \max M = 2$. Desweiteren ist $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ eine Folge in M, die gegen 1 konvergiert. Also ist $\inf M = 1$, und wegen $1 \notin M$ besitzt M kein Minimum.

d) Wegen $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt für $x \in M$ stets $0 < x < \frac{3}{2}$, d.h. M ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und somit existieren Supremum und Infimum. $\left(\frac{1}{2^m}\right)$ ist eine Folge in M (für $n = 1$), die gegen 0 konvergiert, d.h. es ist $\inf M = 0$. Desweiteren ist $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n}\right)$ eine Folge in M (für $m = 1$), die gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert, d.h. es ist $\sup M = \frac{3}{2}$. Da Supremum und Infimum nicht in M liegen, besitzt M weder ein Maximum noch ein Minimum.

42 a) Mit der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

b) Mit der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{6x} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}}{3} = \frac{1}{3}$$

c) Mit der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \underbrace{\tan x}_{=\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{\cos x}{\sin x}} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = -1$$

Bemerkung: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ existiert nicht, da $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

d) Es gilt:

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{1+x-1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

Der gesuchte Grenzwert existiert nicht, denn:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty$$

43 a) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und dort zweimal differenzierbar. Es gilt:

$$f'(x) \;=\; -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{und} \qquad f''(x) \;=\; \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

f ist konvex auf den Intervallen $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ und $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$, da dort $f''(x) \geq 0$ gilt, und konkav auf $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, da dort $f''(x) \leq 0$ gilt. Wendepunkte liegen bei $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ vor, da f'' dort das Vorzeichen wechselt.

b) f ist auf den Intervallen $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definiert und dort zweimal differenzierbar. Es gilt:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{und} \qquad f''(x) \;=\; \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

f ist konvex auf den Intervallen $\left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, da dort $f''(x) \geq 0$ gilt, und konkav auf $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right]$, da dort $f''(x) \leq 0$ gilt. Wendepunkte liegen bei $x = k\pi$ vor, da f'' dort das Vorzeichen wechselt.

c) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und dort zweimal differenzierbar. Es gilt:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{und} \qquad f''(x) \;=\; -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

f ist konvex auf dem Intervall $(-\infty, 0]$, da dort $f''(x) \geq 0$ gilt, und konkav auf $[0, \infty)$, da dort $f''(x) \leq 0$ gilt. Ein Wendepunkt liegt bei $x = 0$ vor, da f'' dort das Vorzeichen wechselt.

44 Es seien $a, b \in I$ und $t \in [0, 1]$ beliebig. Da f konvex ist, gilt

$$f((1-t)a + tb) \;\leq\; (1-t)f(a) + tf(b)\,,$$

und da g monoton wachsend ist, folgt:

$$g(f((1-t)a + tb)) \;\leq\; g((1-t)f(a) + tf(b))$$

Wegen der Konvexität von g ergibt sich daraus

$$g(f((1-t)a + tb)) \;\leq\; (1-t)g(f(a)) + tg(f(b))\,,$$

d.h. $g \circ f$ ist konvex.

Die Aussage gilt im Allgemeinen nicht, wenn g nicht monoton wachsend ist. Gegenbeispiele liefern konvexe Funktionen f, die nicht konkav sind (zum Beispiel $f(x) := x^2$), und g mit $g(x) := -x$.

sawo