Musterlösung zu Blatt 12

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Wintersemester 2007/08

45 a) Die Substitution $t := 3x + 5$ mit $\dfrac{dt}{dx} = 3$ liefert:

$$\int \sqrt{3x+5}\,dx \;=\; \frac{1}{3} \cdot \int \sqrt{t}\,dt \;=\; \frac{2}{9} \cdot t^{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{2}{9} \cdot (3x+5)^{\frac{3}{2}}$$

b) Die Substitution $t := x^2 + 1$ mit $\dfrac{dt}{dx} = 2x$ liefert:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t^2}\,dt \;=\; -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \;=\; -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

c) Partielle Integration liefert:

$$\int x^2 \cos x\,dx \;=\; x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx$$

Eine weitere partielle Integration ergibt:

$$\int x \sin x\,dx \;=\; -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx \;=\; -x\cos x + \sin x$$

Insgesamt also:

$$\int x^2 \cos x\,dx \;=\; x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x \;=\; (x^2-2)\sin x + 2x \cos x$$

46 a) Die Substitution $t := 9 - 5x$ mit $\dfrac{dt}{dx} = -5$ liefert:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-5x}} \;=\; -\frac{1}{5} \cdot \int_9^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} \;=\; -\frac{2}{5} \cdot \sqrt{t}\,\Big|_9^4 \;=\; \frac{2}{5}$$

b) Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \arccos(\sin x)\,dx \;&=\; \frac{x^2}{2}\arccos(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx \\
&=\; \frac{x^2}{2}\arccos(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{2}\,dx \\
&=\; \left[\frac{x^2}{2}\arccos(\sin x) + \frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&=\; \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \\
&=\; \frac{\pi^3}{96}
\end{aligned}$$

47 Ableiten der linken Seite der Gleichung ergibt:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Ableiten der rechten Seite der Gleichung ergibt:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right)' = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

Also stimmen die beiden Ableitungen überein, und mit

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{1}$$

folgt die Behauptung.

48 Definiere die Funktion h durch

$$h(x) := \int_1^x \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$h'(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$$

a) Es ist $f(x) = x \cdot h(x)$. Anwenden der Produktregel ergibt:

$$f'(x) = h(x) + \frac{x}{1+\sin^2 x} = \frac{x}{1+\sin^2 x} + \int_1^x \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

b) Es ist $g(x) = x \cdot h(x^3)$. Unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel folgt:

$$g'(x) = h(x^3) + 3x^3 h'(x^3) = \frac{3x^3}{1+\sin^2(x^3)} + \int_1^{x^3} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

sawo