UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 1

Abgabe: 25.10.07, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Überdeckungskompaktheit). Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so daß für jedes $\xi \in [a, b]$ die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \xi^-} f(x)$$

existieren.
Zeigen Sie: f ist eine Regelfunktion.
Hinweis: Man konstruiere Treppenfunktionen mittels offener Überdeckung und durch eine geeignete endliche Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

Aufgabe 2 (Überdeckungskompaktheit). Man beweise mithilfe von Theorem 50.9: Es seien X, Y metrische Räume, X kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3 (Präkompaktheit). Es seien E ein normierter Raum und $A, B \subseteq E$ präkompakt. Man zeige, daß auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A + B$ präkompakt sind.

Aufgabe 4 (Zerlegung der Eins). a. Seien E ein Banachraum und X ein separabler metrischer Raum und $T \in \mathcal{C}(X, L(E))$, so daß $T(x)$ für alle $x \in X$ linksinvertierbar ist. Man konstruiere $S \in \mathcal{C}(X, L(E))$ mit $S(x)T(x) = id_{L(E)}$ für alle $x \in X$.
b.* Man finde für die Situation aus a. einen linksinvertierbaren aber nicht invertierbaren Operator. *Tip: Man suche vornehmlich in* $E = l^2(\mathbb{N})$.

Aufgabe 5 (Zerlegung der Eins). Aus Satz 50.17 folgere man die Dichtheit von

$$\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y) \;=\; \{\sum_{k=1}^{n} f_k g_k \mid n \in \mathbb{N},\, f_k \in \mathcal{C}(X),\, g_k \in \mathcal{C}(Y)\}$$

in $\mathcal{C}(X \times Y)$