UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 2

Abgabe: 01.10.07, 10 Uhr

Aufgabe 1. Was sagt Satz 51.5 für **lineare** Abbildungen $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ aus? Geben Sie eine kurze Interpretation der Aussage an.

Aufgabe 2. Es seien $\Psi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\Psi(r,\phi) \ = \ \begin{pmatrix} r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdot\ldots\cdot\cos\phi_2\cos\phi_1 \\ r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdot\ldots\cdot\cos\phi_2\sin\phi_1 \\ r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdot\ldots\cdot\cos\phi_3\sin\phi_2 \\ \vdots \\ r\cos\phi_{n-1}\sin\phi_{n-2} \\ r\sin\phi_{n-1} \\ \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für Ψ die Funktionaldeterminante $J\Psi$.

Aufgabe 3. Verwenden Sie die Polarkoordinaten zur Berechnung von

$$\int_{B_1(0)} (x^2+y^2)d^2(x,y),$$

wobei $B_1(0)$ die Einheitskugel sei.

Aufgabe 4. Für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ bestimme man das Volumen der konvexen Hülle

$$\Gamma\{a_0,\ldots,a_n\} = \{\sum_{k=0}^n t_k a_k \mid t_k \geq 0,\ \sum_{k=0}^n t_k = 1\}.$$

Aufgabe 5. Es sei $\Psi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ durch

$$\Psi(u,v) \ = \ (u(1-v), uv)^\top$$

definiert.
a. Man berechne $J\Psi$ und zeige, daß Ψ ein Diffeomorphismus von $(0,1)^2$ auf das Dreieck $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0,\ x+y < 1\}$ ist.
b. Für $p, q \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{C}$ definiere man $f : T \to \mathbb{C}$ durch $f(x,y) = x^{p-1}y^{q-1}g(x+y)$ und zeige, daß f genau dann über T integrierbar ist, wenn $p > 0$, $q > 0$ und $u^{p+q-1}g(u) \in \mathcal{L}_1(0,1)$ gilt.