UNIVERSITÄT DORTMUND
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 3
Abgabe: 08.10.07, 10 Uhr

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgende Aussage.
Sei $N \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x - y \in N\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{2n}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß $||\cdot||_{L_\infty}$ (vgl. Skript, 52 (4)) eine Halbnorm auf $\mathcal{L}_\infty(A)$ ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_\infty(A)$ vollständig unter $||\cdot||_{L_\infty}$ ist.

Aufgabe 4. a. Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_\infty([0,1])$ nicht separabel ist.
Hinweis: Suchen Sie überabzählbar viele Funktionen $\{e_\alpha\}$ in $\mathcal{L}_\infty$ mit $||e_\alpha - e_\beta||_{\mathcal{L}_\infty} = 1$, $\alpha \neq \beta$.
b. Ist $\mathcal{C}([0,1])$ dicht in $\mathcal{L}_\infty([0,1])$?

Aufgabe 5. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $p > 0$ und $r = |x|$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p und n, für welche $\alpha > 0$

$$\frac{1}{r^\alpha} \in \mathcal{L}_p(K_1(0)),$$

und für welche $\alpha > 0$

$$\frac{1}{r^\alpha} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n \setminus K_1(0))$$

gilt.