Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Technische Universität Dortmund

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 4

Abgabe: 15.10.07, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Distributionen). Man finde eine Funktion, deren (Distributions-)Ableitung die Heavisidefunktion ist, d.h. man finde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = H$, wobei H bekanntlich gegeben ist durch

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Diracfunktion). Für eine Diracfolge $(\delta_k) \subseteq \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ beweise man

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\delta_k(x)dx \longrightarrow \phi(0), \quad k \to \infty.$$

Aufgabe 3 (Gaußverteilung). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ sei

$$G_{\alpha,\sigma^2}(x) \;=\; (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$$

eine Gaußverteilung.
a. Man zeige, daß (G_{α,σ^2}) eine Dirac-Familie für $\sigma \to 0^+$ ist.
b. Man zeige

$$\int_{\mathbb{R}} x G_{\alpha,\sigma^2}(x)dx = \alpha \text{ und } \int_{\mathbb{R}} (x-\alpha)^2 G_{\alpha,\sigma^2}(x)dx = \sigma^2$$

c. Man beweise $G_{\alpha,\sigma^2} * G_{\beta,\theta^2} = G_{\alpha+\beta,\sigma^2+\theta^2}$.

Aufgabe 4 (Faltung). Für $r > 0$ sei $H_r = \frac{1}{r}\chi_{[0,r]} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Man zeige
a. $H_r * f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ für $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$
b. $H_r * f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ für $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$

Aufgabe 5 (Wegintegrale). Sei $\gamma \in \mathcal{C}^1_{\text{st}}$ ein Weg und $v \in \mathcal{C}((\gamma), \mathbb{R}^n)$. Man zeige, daß

$$\left| \int_\gamma \langle v(x), dx \rangle \right| \;\le\; \sup\{|v(x)| \mid x \in (\gamma)\} L(\gamma)$$

ist, wobei $L(\gamma)$ die Länge des Weges bezeichne.