Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Technische Universität Dortmund

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 5

Abgabe: 22.10.07, 10 Uhr

Aufgabe 1. Existieren Potentiale für folgende Vektorfelder? Man bestimme gegebenfalls die Potentiale.

$$v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad v(x) = x,$$
$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad v(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$
$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_2)e^{x_1} \\ \sin(x_2)e^{x_1} \end{pmatrix}$$
$$v : \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^2, \qquad v(x) = \begin{pmatrix} x_2/|x| \\ x_1/|x| \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Man berechne die Wegintegrale der folgenden Vektorfelder v über die gegebenen Wege γ:
a. $v(x,y) = (y\sin(x), x^3 + y^2)^T$ mit $(\gamma) = \partial R$, wobei $R = [0,1]^2$.
b. $v(x,y) = (x^2 + y^2)^{-2}(x,y)^T$ mit $(\gamma) = \partial K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3. Es seien $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a,b], \mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
Für welche linearen Transformationen $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{T(\gamma)} \langle Tv(x), dx\rangle \;=\; \int_\gamma \langle v(x), dx\rangle \text{ ?}$$

Aufgabe 4. Man zeige, daß für einen metrischen Raum X die Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geschlossenen Wege $\gamma : [0,1] \to X$ ist.

Aufgabe 5. Gibt es eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $u\big|_{(0,\infty)} = e^{1/x^2}$?