Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Technische Universität Dortmund

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 7

Abgabe: 6. Dezember 2007

Aufgabe 1. Sei $C = \{(x,y,z)^T \mid z \geq 0,\, x^2+y^2 = R^2(1-\frac{z}{h})^2$ ein Kegel der Höhe h und Basiskreisradius R.
a) In welchen Punkten $p \in C$ ist C lokal diffeomorph zum $\mathbb{R}^2$? Geben Sie eine Parametrisierung für diese Punkte an.
b) Bestimmen sie das äußere Normalenvektorfeld auf C.
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt und den Schwerpunkt von C.

Aufgabe 2. Man beweise, daß die *spezielle lineare Gruppe* $SL_{\mathbb{R}}(n) := \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid \det(A) = 1\}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit der Dimension (n^2-1) in $\mathbb{M}_R(n)$ ist. Ferner berechne man ihren Tangentialraum im Punkte I (Einheitsmatrix).
Hinweis: Man benutze das Resultat aus Aufgabe 19.5 aus [A2].

Aufgabe 3. Man berechne den Schwerpunkt...
a) ...des Halbkreises $\mathbb{R}^2 \supseteq S_r^1(0) \cap \{(x,y)^T \mid y \geq 0\}$
b) ...der Halbsphäre $\mathbb{R}^3 \supseteq S_r^2(0) \cap \{(x,y,z)^T \mid z \geq 0\}$

Aufgabe 4. Man berechne das *Gravitationspotential* einer Sphäre,

$$P(x) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_{S_r^2} |x-y|^{-1}\, d\sigma_2(y), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 5. Für $n,m,d \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{H}_d(\mathbb{R}^n)$ zeige man $A \times \mathbb{R}^m \in \mathfrak{H}_{d+m}(\mathbb{R}^{n+m})$.