

## Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 9

**Aufgabe 1.** Für  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  gebe es Zahlen  $\omega, \omega' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $\frac{\omega'}{\omega} \notin \mathbb{R}$  und

$$f(z) = f(z + \omega) = f(z + \omega') \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Man zeige, dass  $f$  konstant ist.

**Aufgabe 2.** Für  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  gelte  $\operatorname{Re}(f(z)) \leq C$  für ein  $C \in \mathbb{R}$ . Man zeige, dass  $f$  konstant ist.

**Aufgabe 3.** a) Es seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet, und für eine holomorphe Funktion  $f$  habe  $|f|$  ein Minimum in  $z_0 \in D$ . Man zeige, dass dann

$$f(z_0) = 0$$

gilt.

b) Mit Hilfe von a) gebe man einen alternativen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

**Aufgabe 4.** Man berechne die folgenden Ableitungen, wobei  $z = x + iy$  gelte:

$$\frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x + y^2)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial z \partial \bar{z}^3}(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\bar{z}z^2 - z^3\bar{z} + 7z)$$

.

**Aufgabe 5.** Berechnen Sie mit dem Residuensatz die folgenden Integrale:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)^2} dx$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3 \sin(x)} dx$$