Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 10

Aufgabe 1. Sei f eine Funktion, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\pi \le x \le 0 \\ -x + \frac{\pi}{2}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

gegeben ist. Man zeige, dass für ihre periodische Fortsetung

$$\tilde{f} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

die normal konvergente (Fourier-)Entwicklung von f ist, und folgere schliesslich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{2}$$

Aufgabe 2. Man zeige für die *Dirichletkerne*, dass gilt

$$\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt \ge c \log(n)$$

Aufgabe 3. Sei H ein Hilbertraum mit zugehörigem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
a) man beweise die *Parallelogrammidentität*

$$||\xi + \eta||^2 + ||\xi - \eta||^2 \ = \ 2(||\xi||^2 + ||\eta||^2) \quad \forall \xi, \eta \in H.$$

b) man zeige, dass $\forall \xi, \eta \in H$ gilt

$$4\langle \xi, \eta \rangle = ||\xi + \eta||^2 - ||\xi - \eta||^2 + i||\xi + i\eta||^2 - i||\xi - i\eta||^2$$

Aufgabe 4. Sei $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Man beweise, dass $\exists C > 0$, so dass

$$\sup_k |\hat{f}(k)||k|^m < C \quad \forall m \in \mathbb{N}$$