Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
18.10.2007

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 01

Musteraufgabe 1 (lineares Gleichungssystem)**.** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 17 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & -16 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -5 \end{array}$$

Lösung. Wir schreiben das lineare Gleichungssystem als vereinfachtes Schema

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -2 & 1 & 17 \\ -3 & 4 & 5 & -1 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}$$

und wenden darauf den Gaußschen Eliminierungsalgorithmus an. Zuerst vertauschen wir die erste und die dritte Zeile:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & -1 & -16 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}$$

Jetzt addieren wir das 3-fache der ersten zur zweiten Zeile und das (-2)-fache der ersten zur dritten Zeile:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}$$

Als nächstes multiplizieren wir die zweite Zeile mit $\frac{1}{4}$:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}$$

Wir addieren das (-3)-fache der zweiten zur dritten Zeile:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{41}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}$$

Nun multiplizieren wir die dritte Zeile mit $-\frac{4}{23}$:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{23} & -\frac{82}{23} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}$$

Addition des (-2)-fachen der dritten zur vierten Zeile liefert:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{23} & -\frac{82}{23} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49}{23} & \frac{49}{23} \end{array}$$

Schließlich multiplizieren wir noch die vierte Zeile mit $\frac{23}{49}$:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{23} & -\frac{82}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Unser lineares Gleichungssystem vom Anfang ist also äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & \frac{5}{4}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & = & -\frac{5}{2} \\ & & & & x_3 & + & \frac{10}{23}x_4 & = & -\frac{82}{23} \\ & & & & & & x_4 & = & 1 \end{array}$$

in Stufenform. Wie man an Hand der vierten Gleichung sofort sehen kann, ist es eindeutig lösbar. Um die Lösungsmenge zu bestimmen, gibt es nun zwei Möglichkeiten.
Die erste Möglichkeit ist rückwärtiges Einsetzen und Auflösen: Zunächst haben wir

$$x_4 = 1,$$

dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt

$$x_3 + \frac{10}{23} \cdot 1 = -\frac{82}{23} \text{ bzw. } x_3 = -\frac{82}{23} - \frac{10}{23} \cdot 1 = -4.$$

Nun können wir diese Werte in die zweiten Gleichung einsetzen und erhalten

$$x_2 + \frac{5}{4} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{5}{2} \text{ bzw. } x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{5}{4} \cdot (-4) - \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.$$

Schließlich setzen wir noch die bekannten Werte in die erste Gleichung ein, es ergibt sich

$$x_1 + 1 = 2 \text{ bzw. } x_1 = 2 - 1 = 1.$$

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist somit gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{(1, 2, -4, 1)\}.$$

Als zweite Möglichkeit hätten wir beim Umformen des Schemas (entweder in jedem Schritt oder - wie hier - am Ende) jeweils oberhalb der Einsen auch Nullen erzeugen können.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{23} & -\frac{82}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wir addieren das (-1)-fache der vierten zur ersten Zeile, das $(-\frac{1}{2})$-fache der vierten zur zweiten Zeile und das $(-\frac{10}{23})$-fache der vierten zur dritten Zeile:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Schließlich addieren wir noch das $(-\frac{5}{4})$-fache der dritten zur zweiten Zeile:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Somit ist unser lineares Gleichungssystem äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & 1 \\ & x_2 & & & = & 2 \\ & & x_3 & & = & -4 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}$$

bei dem man die Lösungsmenge sofort ablesen kann:

$$\mathbb{L} = \{(1, 2, -4, 1)\}.$$

Musteraufgabe 2 (homogenes lineares Gleichungssystem)**.** Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Lösung. Wir erhalten das folgende vereinfachte Schema:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 \end{array}$$

Da die rechten Seiten bei einem homogenen linearen Gleichungssystem sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht ändern, wurden diese von vornherein weggelassen. Wir wenden nun den Gaußschen Eliminierungsalgorithmus an. Zunächst addieren wir die erste zur zweiten Zeile, das (-2)-fache der ersten zur dritten Zeile und das (-1)-fache der ersten zur vierten Zeile:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}$$

Nun addieren wir die zweite Zeile zur ersten, dritten und vierten Zeile:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Schließlich multiplizieren wir noch die zweite Zeile mit (-1):

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Unser lineares Gleichungssystem vom Anfang ist also äquivalent zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Lösen wir nach den Unbekannten x_1 und x_3 auf, so erhalten wir:

$$x_1 = -2x_2 - 4x_4 - 3x_5 \text{ und } x_3 = 3x_4 + 2x_5.$$

Die Unbekannten x_1 und x_3 sind also von den Unbekannten x_2, x_4 und x_5 *abhängig*, diese widerum können *frei* gewählt werden. Als Lösungsmenge ergibt sich

$$\mathbb{L} = \{(-2\lambda - 4\mu - 3\nu, \lambda, 3\mu + 2\nu, \mu, \nu) \mid \lambda, \mu, \nu \text{ beliebig}\}.$$