Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
25.10.2007

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 02

Musteraufgabe 3 (Schnitt von Geraden)**.** Schneiden sich die Geraden g und h? Bestimmen Sie ggf. ihren Schnittpunkt.

(a) Es seien $g = \{(-2,0) + \lambda(4,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \{(4,2) + \mu(2,3) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

(b) Es seien $g = \{(5,0,1) + \lambda(2,1,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \{(7,1,2) + \mu(-6,-3,3) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

(c) Es seien $g = \{(0,1,1) + \lambda(1,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \{(4,2,4) + \mu(2,1,1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

Lösung.

(a) Schneiden sich g und h, so ist $g \cap h \neq \emptyset$. Ist nun $s \in g \cap h$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$s = (-2,0) + \lambda(4,-1) \text{ und } s = (4,2) + \mu(2,3).$$

Es folgt

$$(-2,0) + \lambda(4,-1) = (4,2) + \mu(2,3)$$

bzw.

$$\lambda(4,-1) - \mu(2,3) = (4,2) - (-2,0)$$

bzw.

$$(4\lambda - 2\mu, -\lambda - 3\mu) = (6,2).$$

Folglich ist (λ, μ) eine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & 6 \\ -x & - & 3y & = & 2 \end{array}$$

Wir schreiben das lineare Gleichungssystem als vereinfachtes Schema und wenden den Gauß-Algorithmus an.

$$\begin{array}{rr|r} 4 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \end{array}$$

Zunächst vertauschen wir die beiden Zeilen und multiplizieren danach die erste Zeile mit (-1):

$$\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{array}$$

Jetzt addieren wir das (-4)-fache der ersten zur zweiten Zeile:

$$\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -14 & 14 \end{array}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $-\frac{1}{14}$:

$$\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Schließlich addieren wir noch das (-3)-fache der zweiten zur ersten Zeile:

$$\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Folglich ist $(\lambda, \mu) = (1, -1)$ und damit der potentielle Schnittpunkt s von g und h gegeben durch

$$s = (-2,0) + 1(4,-1) = (2,-1).$$

Da aber $s = (2,-1) = (4,2) + (-1)(2,3) \in h$ ist, schneiden sich g und h in der Tat in s.

(b) Schneiden sich g und h, so ist $g \cap h \neq \emptyset$. Ist nun $s \in g \cap h$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$s = (5,0,1) + \lambda(2,1,-1) \text{ und } s = (7,1,2) + \mu(-6,-3,3).$$

Es folgt

$$(5,0,1) + \lambda(2,1,-1) = (7,1,2) + \mu(-6,-3,3)$$

bzw.

$$\lambda(2,1,-1) - \mu(-6,-3,3) = (7,1,2) - (5,0,1)$$

bzw.

$$(2\lambda + 6\mu, \lambda + 3\mu, -\lambda - 3\mu) = (2,1,1).$$

Folglich ist (λ, μ) eine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 6y & = & 2 \\ x & + & 3y & = & 1 \\ -x & - & 3y & = & 1 \end{array}$$

Wir schreiben das lineare Gleichungssystem als vereinfachtes Schema und wenden den Gauß-Algorithmus an.

$$\begin{array}{rr|r} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}$$

Addition der zweiten und dritten Zeile liefert:

$$\begin{array}{rr|r} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Wie man an der letzten Zeile erkennen kann, ist das lineare Gleichungssystem unlösbar. Somit gibt es kein Paar (λ, μ) mit den geforderten Eigenschaften, was widerum bedeutet, dass g und h keinen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen.

(c) Schneiden sich g und h, so ist $g \cap h \neq \emptyset$. Ist nun $s \in g \cap h$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$s = (0,1,1) + \lambda(1,0,1) \text{ und } s = (4,2,4) + \mu(2,1,1).$$

Es folgt

$$(0,1,1) + \lambda(1,0,1) = (4,2,4) + \mu(2,1,1)$$

bzw.

$$\lambda(1,0,1) - \mu(2,1,1) = (4,2,4) - (0,1,1)$$

bzw.

$$(\lambda - 2\mu, -\mu, \lambda - \mu) = (4,1,3).$$

Folglich ist (λ, μ) eine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 4 \\ & - & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 3 \end{array}$$

Wir schreiben das lineare Gleichungssystem als vereinfachtes Schema und wenden den Gauß-Algorithmus an.

$$\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}$$

Zuerst addieren wir das (-1)-fache der ersten zur dritten Zeile. Das liefert:

$$\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Danach vertauschen wir die zweite und die dritte Zeile:

$$\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Schließlich addieren wir noch das 2-fache der zweiten zur ersten Zeile sowie die zweite zur dritten Zeile. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Folglich ist $(\lambda, \mu) = (2, -1)$ und damit der potentielle Schnittpunkt s von g und h gegeben durch

$$s = (0, 1, 1) + 2(1, 0, 1) = (2, 1, 3).$$

Da aber $s = (2, 1, 3) = (4, 2, 4) + (-1) \cdot (2, 1, 1) \in h$ ist, schneiden sich g und h in der Tat in s.