Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 06.11.2007, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 03

Aufgabe 9 (Einheitsvektoren und Winkel)**.**

(a) Bestimmen Sie die beiden Einheitsvektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$, die sowohl mit e_2 den Winkel $\frac{\pi}{3}$ als auch und mit e_3 den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen.

(b) Berechnen Sie einen zu x und y orthogonalen Einheitsvektor.

Aufgabe 10 (höherdimensionale analytische Geometrie)**.** Im $\mathbb{R}^4$ seien die Gerade

$$g = \{(-6, 2, -3, 5) + \lambda(4, 3, -4, 3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und die Ebene

$$E = \{(1, 1, 1, 2) + \mu(1, -3, 0, 0) + \nu(1, 2, 0, 0) \mid \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Schnittmenge von g mit E.

(b) Konstruieren Sie eine Ebene F, deren Richtungsvektoren senkrecht auf der Ebene E stehen und die durch den Punkt $(-6, 2, -3, 5)$ geht.

(c) Berechnen Sie die Schnittmenge von E und F.

(d) Geben Sie den Winkel an, in dem die Gerade g die Ebene E schneidet.

Aufgabe 11 (Kosinussatz und Satz des Pythagoras)**.**

(a) Es seien A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks im $\mathbb{R}^n$ und es seien a, b, c die Längen der den Punkten A, B, C jeweils gegenüberliegenden Seiten. Es bezeichne ferner $\gamma \in \,]0, \pi[$ den *Innenwinkel* im Eckpunkt C. Beweisen Sie die folgende Identität:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos \gamma).$$

(b) Formulieren und beweisen Sie den Satz des Pythagoras (das ist der Kosinussatz im Spezialfall $\gamma = \frac{\pi}{2}$).

Aufgabe 12 (Symmetriegruppe des Tetraeders)**.** Wir betrachten einen *regulären* Tetraeder, d.h. einen Tetraeder T, in dem alle Seiten dieselbe Länge haben. Seine Eckpunkte seien mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnet. Wir betrachten im Folgenden Drehungen und Spiegelungen, die den Tetraeder T in sich überführen. Zum Beispiel lässt die Spiegelung an der Ebene $E_{1,2}$, die durch die Eckpunkte 1 und 2 sowie durch den Mittelpunkt der Kante durch 3 und 4 geht, die Eckpunkte 1 und 2 fest und vertauscht die Eckpunkte 3 und 4 (vgl. Skizze). Wir schreiben für die Permutation der Eckpunkte, welche durch diese Spiegelung hervorgerufen wird,

$$\text{statt} \quad \begin{array}{l} 1 \mapsto 1, \\ 2 \mapsto 2, \\ 3 \mapsto 4, \\ 4 \mapsto 3, \end{array} \quad \text{kurz} \; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie alle Permutationen der Eckpunkte von T, die durch solche Spiegelungen und Drehungen hervorgerufen werden, welche T in sich selbst überführen. Geben Sie dabei jeweils die Spiegelungsebene bzw. die Drehachse an.