Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
08.11.2007

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 03

Musteraufgabe 4 (Längenvergleich von Hypotenuse und Katheten im rechtwinkligen Dreieck)**.** Es seien A, B, C die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks im $\mathbb{R}^n$ mit rechtem Winkel bei C. Zeigen Sie: Es ist

$$\mathrm{d}(A,C) < \mathrm{d}(A,B) \text{ und } \mathrm{d}(B,C) < \mathrm{d}(A,B).$$

Lösung. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\mathrm{d}(A,C)^2 + \mathrm{d}(B,C)^2 = \mathrm{d}(A,B)^2.$$

Wegen $B \neq C$ bzw. $A \neq C$ ist aber $\mathrm{d}(B,C) > 0$ bzw. $\mathrm{d}(A,C) > 0$, also auch

$$\mathrm{d}(A,C)^2 < \mathrm{d}(A,C)^2 + \mathrm{d}(B,C)^2 = \mathrm{d}(A,B)^2 \text{ bzw. } \mathrm{d}(B,C)^2 < \mathrm{d}(A,C)^2 + \mathrm{d}(B,C)^2 = \mathrm{d}(A,B)^2$$

und damit

$$\mathrm{d}(A,C) < \mathrm{d}(A,B) \text{ und } \mathrm{d}(B,C) < \mathrm{d}(A,B).$$

Musteraufgabe 5 (Abstand von Punkt und Gerade)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $g = \{a + \lambda r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $a, r \in \mathbb{R}^n$, $r \neq 0$, eine Gerade in $\mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n \setminus g$.

(a) Zeigen Sie, dass es genau ein $q \in g$ gibt, so dass die Verbindungsgerade von q und p orthogonal zu g ist. Dabei heißen zwei Geraden *orthogonal*, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind. Überlegen Sie sich, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Richtungsvektoren in den Darstellungen der Geraden ist.

(b) Beweisen Sie, dass der Abstand von p und q minimal unter allen Abständen von p zu Punkten $x \in g$ ist:

$$\mathrm{d}(p,q) = \min_{x \in g} \mathrm{d}(p,x).$$

Man definiert diesen Abstand als den *Abstand von p zur Geraden g*:

$$\mathrm{d}(p,g) := \min_{x \in g} \mathrm{d}(p,x).$$

Lösung.

(a) Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit. Es sei $q \in g$, etwa $q = a + \lambda r$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $p - q$ orthogonal zu r ist. Dann folgt

$$\langle p-a, r\rangle = \langle (p-q) + (q-a), r\rangle = \langle p-q, r\rangle + \langle q-a, r\rangle = \langle q-a, r\rangle = \langle \lambda r, r\rangle = \lambda\langle r, r\rangle$$

und somit

$$\lambda = \frac{\langle p-a, r\rangle}{\langle r, r\rangle}.$$

Es ist also

$$q = a + \frac{\langle p-a, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$$

eindeutig bestimmt.

Umgekehrt folgt aus $q := a + \frac{\langle p-a,r\rangle}{\langle r,r\rangle} r$ aber auch

$$\langle p-q, r\rangle = \langle p - a - \frac{\langle p-a, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r, r\rangle = \langle p-a, r\rangle - \frac{\langle p-a, r\rangle}{\langle r, r\rangle}\langle r, r\rangle = 0,$$

d.h. es ist $p - q$ orthogonal zu r und damit auch die Verbindungsgerade durch q und p zu g.

(b) Für alle $x \in g$ mit $x \neq q$ haben wir ein rechtwinkliges Dreieck mit Eckpunkten p, q, x und rechtem Winkel bei q und damit $\mathrm{d}(p,q) < \mathrm{d}(p,x)$. Folglich ist

$$\mathrm{d}(p,q) \leq \mathrm{d}(p,x)$$

für alle $x \in g$ und damit

$$\mathrm{d}(p,q) = \min_{x \in g} \mathrm{d}(p,x).$$

Musteraufgabe 6 (Abstand von zwei Geraden)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und es seien $g = \{a + \lambda r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \{b + \mu s \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ mit $a, b, r, s \in \mathbb{R}^n$, $r \neq 0$ und $s \neq 0$, zwei Geraden in $\mathbb{R}^n$ mit $g \cap h = \emptyset$. Ferner werde angenommen, dass es Punkte $p \in g$ und $q \in h$ gibt, so dass die Verbindungsgerade von p und q orthogonal zu g und h ist. Zeigen Sie, dass der Abstand von p und q minimal unter allen Abständen von Elementen $x \in g$ und $y \in h$ ist:

$$\mathrm{d}(p,q) = \min_{x \in g, y \in h} \mathrm{d}(x,y).$$

Dieser Abstand heißt *Abstand der Geraden g und h.*

$$\mathrm{d}(g,h) := \min_{x \in g, y \in h} \mathrm{d}(x,y).$$

Lösung. Es seien $x \in g$ und $y \in h$ mit $(x,y) \neq (p,q)$. Da die Verbindungsgerade von p und q orthogonal zu g und h ist, gilt $\langle p-q, x-p \rangle = 0$ und $\langle p-q, y-q \rangle = 0$. Dann folgt aber auch

$$\langle p-q, (y-q)-(x-p) \rangle = \langle p-q, y-q \rangle - \langle p-q, x-p \rangle = 0 - 0 = 0,$$

d.h. die Punkte p, q und $q + (y-q) - (x-p)$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel in q. Es folgt

$$\mathrm{d}(p,q) < \mathrm{d}(p, q + (y-q) - (x-p)) = \mathrm{d}(p, y-x+p) = \mathrm{d}(x,y).$$

Somit ist

$$\mathrm{d}(p,q) \leq \mathrm{d}(x,y)$$

für alle $x \in g$, $y \in h$ und damit

$$\mathrm{d}(p,q) = \min_{x \in g, y \in h} \mathrm{d}(x,y).$$