Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 13.11.2007, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 04

Aufgabe 13 (Umkehrabbildung)**.** Es seien M und N Mengen und es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Eine *Umkehrabbildung* von f ist eine Abbildung $g\colon N \to M$, für die $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Es ist f genau dann injektiv, wenn $M = \emptyset$ ist oder eine Abbildung $g\colon N \to M$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

(b) Es ist f genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g\colon N \to M$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

(c) Die Abbildung f genau dann bijektiv, wenn sie eine Umkehrabbildung besitzt.

(d) Die Umkehrabbildung zu f eindeutig bestimmt.

(e) Geben Sie ein Beispiel für Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ an, für die $g \circ f = \mathrm{id}_M$ gilt und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ nicht gilt.

Hinweis: Man bezeichnet die zu einer bijektiven Abbildung f gegebene und eindeutig bestimmte Umkehrabbildung mit f^{-1}.

Aufgabe 14 (Redundanz der Gruppenaxiome)**.** Es sei G eine nicht-leere Menge mit einer inneren Verknüpfung $\cdot\colon G \times G \to G$, welche die folgenden Axiome erfüllt:

(AG) Assoziativgesetz: Für alle $g, h, k \in G$ gilt $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$.

(RNE) Existenz eines rechtsneutralen Elements: Es existiert ein Element $e \in G$ mit $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$. Man nennt e ein *rechtsneutrales Element* (in G bzgl. $\cdot$).

(RIE) Existenz eines rechtsinversen Elements: Für alle $g \in G$ existiert ein $h \in G$ mit $g \cdot h = e$. Man nennt h ein *rechtsinverses Element* zu g (bzgl. $\cdot$ und e).

Zeigen Sie, dass G mit der angegebenen Verknüpfung eine Gruppe ist.
Hinweis: Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zuerst, dass ein rechtsinverses Element auch linksinvers ist.

(b) Folgern Sie danach, dass jedes rechtsneutrale Element auch linksneutral ist.

Aufgabe 15 (Potenzgesetze)**.** Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Es ist $g^k g^l = g^{k+l}$ für alle $g \in G$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

(b) Es ist $(g^k)^l = g^{kl}$ für alle $g \in G$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 16 (Rechnen in der symmetrischen Gruppe)**.** In der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_9$ seien die Elemente

$$\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 9&8&7&6&5&4&3&2&1 \end{smallmatrix}\right), \rho = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 9&8&7&6&1&2&3&4&5 \end{smallmatrix}\right), \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 7&9&4&3&1&6&8&2&5 \end{smallmatrix}\right) \text{ und } \tau = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 4&6&8&9&2&3&5&7&1 \end{smallmatrix}\right)$$

gegeben.

(a) Stellen Sie die vier Elemente in Zykelschreibweise dar.

(b) Bestimmen Sie für jedes der vier Elemente die kleinste natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass die k-te Potenz dieses Elements die Identität ergibt.

(c) Bestimmen Sie π^{-1}, ρ^{-1}, $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

(d) Berechnen Sie ρ^{876} und τ^{1234}.