Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
15.11.2007

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 04

Musteraufgabe 7 (Diedergruppe)**.** Es sei durch $D_4 := [\rho, \sigma]$ mit $\rho := (1,2)(3,4)$ und $\sigma := (1,3)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_4$ gegeben.

(a) Berechnen Sie alle Elemente von D_4.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von D_4 und geben Sie an, wie die Untergruppen ineinander liegen.

(c) Geben Sie ein alternatives Erzeugendensystem an, welches ein Element der Ordnung 4 enthält.

(d) Betrachten Sie nun ein Quadrat Q, dessen Ecken (fortlaufend) mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnet seien. Zeigen Sie, dass die Drehungen und Spiegelungen, welche Q in sich überführen, auf den Ecken genau die Permutationen aus D_4 hervorrufen.

(e) Nun sei allgemeiner ein reguläres n-Eck P_n für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gegeben und es seien dessen Ecken (fortlaufend) mit $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet. Geben Sie eine Definition einer Untergruppe D_n von $\mathfrak{S}_n$ an, so dass die Elemente von D_n genau diejenigen Permutationen der Ecken von P_n sind, die durch Drehungen und Spiegelungen hervorgerufen werden, welche P_n in sich überführen.

Lösung.

(a) Wir ermitteln die Elemente von D_4 durch iteriertes Multiplizieren der Erzeuger ρ und σ von links an bereits berechnete Elemente von D_4, wobei wir mit 1, $\rho = \rho 1$ und $\sigma = \sigma 1$ beginnen. Um uns die Arbeit etwas zu erleichtern, beachten wir zunächst, dass ρ und σ beides Involutionen sind, d.h. es gilt $\rho\rho = \sigma\sigma = 1$ und damit auch $\rho\rho\pi = \sigma\sigma\pi = \pi$ für alle $\pi \in D_4$. Somit ist es also niemals nötig, zweimal den gleichen Erzeuger an ein bekanntes Element von D_4 zu multiplizieren, da dadurch stets wieder ein bekanntes Element berechnet wird. Nun ist

$$\begin{aligned}
&1 = 1,\\
&\rho = (1,2)(3,4),\\
&\sigma = (1,3),\\
&\sigma\rho = (1,2,3,4),\\
&\rho\sigma\rho = (2,4),\\
&\sigma\rho\sigma\rho = (1,3)(2,4),\\
&\rho\sigma\rho\sigma\rho = (1,4)(2,3),\\
&\sigma\rho\sigma\rho\sigma\rho = (1,4,3,2),\\
&\rho\sigma\rho\sigma\rho\sigma\rho = (1,3) = \sigma,\\
&\rho\sigma = (1,4,3,2) = \sigma\rho\sigma\rho\sigma\rho,
\end{aligned}$$

wir haben also

$$\begin{aligned}
D_4 &= \{1, \rho, \sigma, \sigma\rho, \rho\sigma\rho, \sigma\rho\sigma\rho, \rho\sigma\rho\sigma\rho, \sigma\rho\sigma\rho\sigma\rho\}\\
&= \{1, (1,3), (2,4), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3,4), (1,4,3,2)\}.
\end{aligned}$$

(b) Um die Untergruppen von D_4 zu ermitteln, gehen wir wieder schrittweise vor: Zunächst ist $\{1\}$ sicherlich eine Untergruppe von D_4. Als nächstes erzeugt jedes Element von D_4 eine zyklische Untergruppe, welche sämtliche Potenzen dieses Elements enthält:

$$\begin{aligned}
&[(1,3)] = \{1, (1,3)\},\\
&[(2,4)] = \{1, (2,4)\},\\
&[(1,2)(3,4)] = \{1, (1,2)(3,4)\},\\
&[(1,3)(2,4)] = \{1, (1,3)(2,4)\},\\
&[(1,4)(2,3)] = \{1, (1,4)(2,3)\},\\
&[(1,2,3,4)] = \{1, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\}\\
&[(1,4,3,2)] = \{1, (1,4,3,2), (1,3)(2,4), (1,2,3,4)\} = [(1,2,3,4)].
\end{aligned}$$

Weitere Untergruppen von D erhalten wir nun dadurch, dass wir Untergruppen betrachten, die von mindestens zwei Elementen erzeugt werden. Dabei gilt zu beachten, dass wegen $|U| \mid |D_4|$ für alle Untergruppen $U \leq D_4$ die Untergruppe $[(1,2,3,4)] = [(1,4,3,2)]$ maximal ist, d.h. es ist $[(1,2,3,4),\pi] = [(1,4,3,2),\pi] = D_4$ für alle $\pi \in D_4 \setminus [(1,4,3,2)]$. Wir erhalten dadurch noch die maximale Untergruppe

$$[(1,3),(2,4)] = \{1,(1,3),(2,4),(1,3)(2,4)\} = [(1,3),(1,3)(2,4)] = [(2,4),(1,3)(2,4)].$$

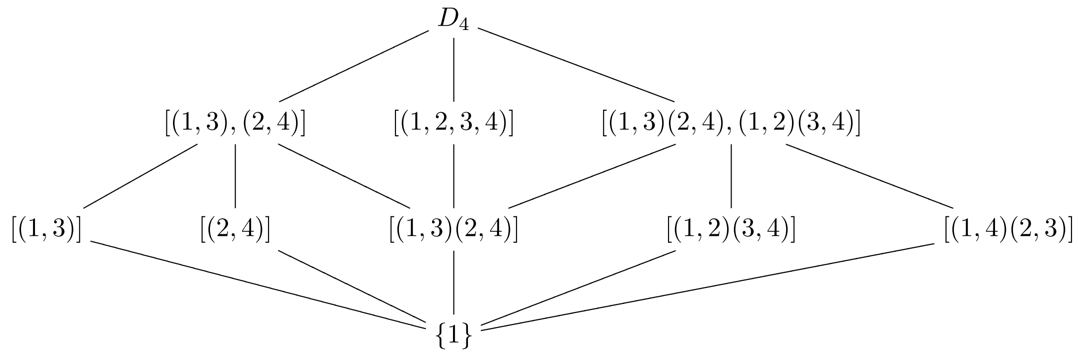
Betrachten wir nun $[(1,3),(1,2)(3,4)]$, so ist diese Untergruppe per Definition gleich D_4. Außerdem sind

$$\begin{aligned}
&(1,4,3,2) = (1,3)(1,4)(2,3) \in [(1,3),(1,4)(2,3)],\\
&(1,4,3,2) = (2,4)(1,2)(3,4) \in [(2,4),(1,2)(3,4)] \text{ und}\\
&(1,4,3,2) = (1,4)(2,3)(2,4) \in [(2,4),(1,4)(2,3)],
\end{aligned}$$

und folglich $[(1,3),(1,4)(2,3)] = [(2,4),(1,2)(3,4)] = [(2,4),(1,4)(2,3)] = D_4$. Zuletzt bleiben die Untergruppen zu betrachten, die von mindestens zwei Doppeltranspositionen erzeugt sind. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
[(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)] &= [(1,2)(3,4),(1,4)(2,3)] = [(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)]\\
&= \{1,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}
\end{aligned}$$

eine echte Untergruppe von D_4, womit wir alle echten Untergruppen von D_4 ermittelt haben. Natürlich ist D_4 selbst ebenfalls eine Untergruppe von D_4. Insgesamt hat D_4 somit zehn Untergruppen, deren Enthaltenseins-Relation sich aus folgendem Untergruppenverband ablesen lässt:



(c) Es sei $\delta := \sigma\rho = (1,2,3,4)$. Dann gilt $D_4 = [\rho,\sigma] = [\delta,\sigma]$, denn einerseits ist $\delta = \sigma\rho \in [\rho,\sigma]$ und andererseits ist $\rho = \sigma^{-1}\sigma\rho = \sigma^{-1}\delta \in [\delta,\sigma]$.

(d) Die folgenden Permutationen entsprechen Drehungen um den Mittelpunkt des Quadrats:

Permutation	Drehungwinkel
1	0
$(1,2,3,4)$	$\frac{\pi}{2}$
$(1,3)(2,4)$	π
$(1,4,3,2)$	$\frac{3\pi}{2}$

Die folgenden Permutationen entsprechen Spiegelungen:

Permutation	Spiegelungsachse
$(1,3)$	durch 2 und 4
$(2,4)$	durch 1 und 3
$(1,2)(3,4)$	durch die Mittelpunkte der Seiten mit den Ecken 1 und 2 bzw. 3 und 4
$(1,4)(2,3)$	durch die Mittelpunkte der Seiten mit den Ecken 1 und 4 bzw. 2 und 3

(e) Es sei $\delta,\sigma \in \mathfrak{S}_n$ gegeben durch

$$\delta := (1,2,\ldots,n) \text{ und } \sigma := \begin{cases} (1,n-1)(2,n-2)(\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1), & \text{falls } n \text{ gerade},\\ (1,n-1)(2,n-2)(\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}), & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Die Permutation δ wird von einer Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ induziert, während die Permutation σ von einer Spiegelung an der Spiegelungsachse durch den Punkt n und den gegenüberliegenden Punkt des n-Ecks (der entweder durch $\frac{n}{2}$ im Fall, dass n gerade ist, oder durch den Mittelpunkt der Seite zwischen den Eckpunkten $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ im Fall, dass n ungerade ist, gegeben ist) induziert wird.

Für jede durch eine Drehung oder Spiegelung hervorgerufene Permutation $\pi \in D_n$ werden benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abgebildet; falls π eine Drehung ist, so bleibt die Orientierung erhalten, und falls π eine Spiegelung ist, so dreht sich die Orientierung gerade um. Wie man leicht überprüft, haben wir im ersten Fall $\pi = \delta^{\pi(n)}$ und im zweiten Fall $\pi = \delta^{\pi(n)}\sigma$. Folglich gilt für alle $\pi \in D_n$ bereits $\pi \in [\delta, \sigma]$ und damit $D_n = [\delta, \sigma]$.