Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 20.11.2007, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 05

Aufgabe 17 (Äquivalenzklassen)**.** Es sei M eine Menge und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Für ein Element $m \in M$ setzen wir $[m] := [m]_{\equiv} := \{n \in M \mid m \equiv n\}$ und nennen dies die *Äquivalenzklasse* von m (in M bzgl. $\equiv$). Weiter bezeichne $M/{\equiv} := \{[m] \mid m \in M\}$ die Menge der Äquivalenzklassen in M bzgl. $\equiv$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $m \in M$ ist $m \in [m]$.

(b) Für alle $m, n \in M$ ist $[m] = [n]$ genau dann, wenn $m \equiv n$ ist.

(c) Die Abbildung $p := p_{\equiv} \colon M \to M/{\equiv}, m \mapsto [m]$, ist surjektiv. Sie heißt *kanonische Projektion* zur Äquivalenzrelation $\equiv$.

Aufgabe 18 (Untergruppen von $\mathbb{Z}$)**.** Wir betrachten die Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zusammen mit der gewöhnlichen Addition als Verknüpfung.

(a) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}$.

(b) Welche Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind ineinander enthalten?

(c) Wieviele endliche Untergruppen hat $\mathbb{Z}$?

(d) Welche Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind *maximal*, d.h. welche Untergruppen sind echte Untergruppen $U \subsetneq \mathbb{Z}$, so dass es keine echte Untergruppe $U \subsetneq V \subsetneq \mathbb{Z}$ gibt?

Aufgabe 19 (Erzeugendensystem der symmetrischen Gruppe)**.** Wir betrachten die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ eine gegebene natürliche Zahl sei. Ein Element der Form $(k, k+1) \in \mathfrak{S}_n$ für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ heißt *Nachbartransposition.* Zeigen Sie:

(a) Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen.

(b) Jede Transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$ lässt sich als Produkt von Nachbartranspositionen darstellen.

(c) Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ wird von den Elementen $(1, 2, \ldots, n)$ und $(1, 2)$ erzeugt.

Aufgabe 20 (Gruppen kleiner Ordnung)**.**

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Gruppentafeln (bis auf Umbenennung und Umnummerierung der Elemente) für Gruppen mit höchstes fünf Elementen.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppen aus Aufgabenteil (a).

(c) Geben Sie zwei Gruppen der Ordnung 6 an und bestimmen Sie deren Untergruppen.

Zusatzaufgabe 21 (Untergruppen von $\mathfrak{S}_4$)**.** Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$.

Hinweis: Es handelt sich bei Aufgabe 21 um eine freiwillige Zusatzaufgabe. Sie haben für die Bearbeitung insgesamt zwei Wochen Zeit; Abgabe ist am Dienstag, 27.11.2007, 14:00 Uhr. Für die richtige Bearbeitung gibt es acht zusätzliche Punkte. Die Punkte, die Sie durch die Bearbeitung dieser Aufgabe erreichen, werden Ihnen angerechnet, zählen aber nicht zu der maximal erreichbaren Punktzahl, von der Sie für die Klausurzulassung 50 % benötigen.