Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 27.11.2007, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 06

Aufgabe 22 (endliche zyklische Gruppen)**.** Es sei C eine endliche zyklische Gruppe, erzeugt von $c \in C$.

(a) Beweisen Sie, dass alle Untergruppen von C zyklisch sind.

(b) Zeigen Sie, dass alle Faktorgruppen von C zyklisch sind.

(c) Zeigen Sie, dass es für jeden Teiler $k \in \mathbb{N}$ von $\operatorname{ord} C$ genau eine Untergruppe vom Index k in C gibt und geben Sie einen Erzeuger dieser Gruppe an.

(d) Bestimmen Sie alle Elemente $x \in C$ mit $C = [x]$.

Aufgabe 23 (Struktur von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

(a) Welche Untergruppen hat $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

(b) Ein Element $k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $k \in \mathbb{Z}$ heißt *invertierbar*, wenn es ein $l \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$(k + n\mathbb{Z})(l + n\mathbb{Z}) = 1 + n\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass $k+n\mathbb{Z}$ für eine gegebene ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\operatorname{ggT}(k, n) = 1$ gilt.

Aufgabe 24 (Teilringe und Teilkörper der reellen Zahlen)**.**

(a) Zeigen Sie, dass es keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ gibt.

(b) Wir betrachten die Teilmengen

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ und } \mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sich die Verknüpfungen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ *vererben*, d.h. dass die Einschränkungen dieser Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ bzw. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ Bilder in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ bzw. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ annehmen (Abgeschlossenheit von Addition und Multiplikation), und dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ bzgl. dieser Verknüpfungen ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist.

Aufgabe 25 (direkte Produkte)**.**

(a) Es seien G und H Gruppen. Auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ definieren wir eine Verknüpfung $\cdot$ durch

$$(g, h)(g', h') := (gg', hh') \text{ für alle } (g, h), (g', h') \in G \times H.$$

Man spricht hierbei von *komponentenweiser Verknüpfung*. Zeigen Sie, dass $G \times H$ zusammen mit der komponentenweisen Verknüpfung eine Gruppe ist, die genau dann abelsch ist, wenn G und H abelsch sind. Man nennt $G \times H$ das (*äußere*) *direkte Produkt* der Gruppen G und H.

(b) Es seien R und S kommutative Ringe mit Einselement. Definieren Sie in analoger Weise auf $R \times S$ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, bzgl. derer $R \times S$ ein kommutativer Ring mit Einselement wird.

(c) Nun seien K und L Körper. Wieso ist $K \times L$ bzgl. komponentenweiser Verknüpfungen kein Körper?

(d) Zeigen Sie, dass stattdessen $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation gegeben durch

$$(x, y)(x', y') := (xx' - yy', xy' + yx') \text{ für alle } (x, y), (x', y') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

ein Körper wird.