Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 04.12.2007, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 07

Aufgabe 26 (lineare Unabhängigkeit bei parameterabhängigen Vektoren)**.** Für welche Werte von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$a = (1, \alpha, \alpha^2), b = (1, \beta, \beta^2), c = (1, \gamma, \gamma^2)$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

Aufgabe 27 (Abhängigkeit der linearen Unabhängigkeit vom Grundkörper)**.** Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$(1, 2, 3, 4), (2, 9, 6, 8), (3, 12, 17, 12), (4, 18, 21, 27)$$

im K-Vektorraum K^4 linear unabhängig sind, wobei $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{11}, \mathbb{F}_{13}\}$.

Aufgabe 28 (Körper als Vektorräume)**.**

(a) Es sei L ein Körper und $K \subset L$ ein *Unterkörper*, d.h. eine Teilmenge von L, so dass K bzgl. der Addition eine Untergruppe von L und $K \setminus \{0\}$ bzgl. der Multiplikation eine Untergruppe von $L \setminus \{0\}$ ist. Zeigen Sie, dass L zusammen mit der Addition und der auf $K \times L$ eingeschränkten Multiplikation ein Vektorraum über K ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6} \in \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Aufgabe 29 (Funktionenraum)**.** Es seien eine Menge M und ein Körper K gegeben. Wir betrachten auf der Menge K^M aller Abbildungen von M nach K die argumentweise definierten Verknüpfungen, d.h. es gelte

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m) \text{ und } (\lambda f)(m) := \lambda f(m) \text{ für alle } m \in M, f, g \in K^M, \lambda \in K.$$

(a) Zeigen Sie, dass K^M zusammen mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum ist.

(b) Geben Sie unter der Voraussetzung, dass M unendlich ist, eine unendliche Teilmenge $\mathcal{B} \subset K^M$ an, so dass gilt: Für jede endliche Teilmenge $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ ist das Vektorsystem bestehend aus den Elementen von $\mathcal{B}'$ linear unabhängig.

(c) Finden Sie eine linear unabhängige Teilmenge in $(\mathbb{F}_5)^{\mathbb{F}_5}$ mit möglichst vielen Vektoren.