Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
06.12.2007

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 07

Musteraufgabe 11 (komplexe Zahlen)**.** In Übung 6, Aufgabe 25 (d), haben wir gesehen, dass das kartesische Produkt $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit komponentenweise definierter Addition und einer Multiplikation definiert durch

$$(x, y)(x', y') := (xx' - yy', xy' + yx') \text{ für alle } (x, y), (x', y') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

einen Körper bildet. Außer den Körperaxiomen von $\mathbb{Q}$ haben wir zum Beweis nur benutzt, dass $x^2 + y^2 \neq 0$ für alle $(x, y) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0, 0)\}$ ist. Somit können wir in analoger Weise durch

$$(x, y)(x', y') := (xx' - yy', xy' + yx') \text{ für alle } (x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

eine Multiplikation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren, durch welche $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (zusammen mit komponentenweise definierter Addition) ein Körper wird. Wir wollen diesen Körper als $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bezeichnen, seine Elemente heißen *komplexe Zahlen*. Die komplexe Zahl $\mathrm{i} := (0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit*.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0)$, injektiv sowie additiv und multiplikativ ist, d.h. dass $\iota(x + x') = \iota(x) + \iota(x')$ und $\iota(xx') = \iota(x)\iota(x')$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $1, \mathrm{i}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Nach (b) lässt sich jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ eindeutig darstellen als Linearkombination $z = x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Man nennt dies die *Standarddarstellung* der komplexen Zahl z, die eindeutig bestimmten Koeffizienten $x, y \in \mathbb{R}$ heißen *Realteil* bzw. *Imaginärteil* von z. Man schreibt $\operatorname{Re} z := x$ und $\operatorname{Im} z := y$. Ferner bezeichnet man mit $\overline{z} := \operatorname{Re} z - (\operatorname{Im} z)\mathrm{i}$ die zu z *komplex konjugierte* komplexe Zahl.

(d) Zeigen Sie, dass für den Realteil und den Imaginärteil einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2} \text{ und } \operatorname{Im} z = \mathrm{i}\frac{\overline{z} - z}{2}.$$

(e) Die euklidische Länge einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet man auch als den *Betrag* von z. Zeigen Sie, dass sich der Betrag von $z \in \mathbb{C}$ berechnen lässt als $|z|^2 = z\overline{z}$.

Lösung.

(a) Für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $\iota(x) = \iota(x')$ gilt $(x, 0) = (x', 0)$ und damit $x = x'$, d.h. ι ist injektiv. Ferner gilt

$$\iota(x + x') = (x + x', 0) = (x, 0) + (x', 0) = \iota(x) + \iota(x')$$

und

$$\iota(xx') = (xx', 0) = (xx' - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot x') = (x, 0)(x', 0) = \iota(x)\iota(x')$$

für alle $x, x' \in \mathbb{R}$, d.h. ι ist additiv und multiplikativ.

(b) Es ist

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1.$$

(c) Es bilden $1 = (1, 0) = \mathrm{e}_1$ und $\mathrm{i} = (0, 1) = \mathrm{e}_2$ die Standardbasis von $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{\overline{z} + z}{2} = \frac{(\operatorname{Re} z) - (\operatorname{Im} z)\mathrm{i} + (\operatorname{Re} z) + (\operatorname{Im} z)\mathrm{i}}{2} = \frac{2(\operatorname{Re} z)}{2} = \operatorname{Re} z$$

und

$$\mathrm{i}\frac{\overline{z} - z}{2} = \mathrm{i}\frac{(\operatorname{Re} z) - (\operatorname{Im} z)\mathrm{i} - (\operatorname{Re} z) - (\operatorname{Im} z)\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}\frac{-2(\operatorname{Im} z)\mathrm{i}}{2} = -(\operatorname{Im} z)\mathrm{i}^2 = \operatorname{Im} z.$$

(e) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z = (\operatorname{Re} z) + (\operatorname{Im} z)\mathrm{i} = (\operatorname{Re} z)(1,0) + (\operatorname{Im} z)(0,1) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, also gilt

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= ((\operatorname{Re} z) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} z))((\operatorname{Re} z) - \mathrm{i}(\operatorname{Im} z)) = (\operatorname{Re} z)^2 - (\mathrm{i}(\operatorname{Im} z))^2 = (\operatorname{Re} z)^2 - \mathrm{i}^2(\operatorname{Im} z)^2 \\ &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)|^2 = z^2. \end{aligned}$$

Musteraufgabe 12. Es sei ein Untervektorraum $U \subset \mathbb{C}^4$ über $\mathbb{C}$ gegeben durch

$$U := \operatorname{sp}((1,0,\mathrm{i},-1),(\mathrm{i},1,-2,1+\mathrm{i}),(0,\mathrm{i},-\mathrm{i},-2+\mathrm{i})).$$

Bestimmen Sie eine Basis von U.

Lösung. Wir schreiben die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und wenden den Gaußschen Eliminierungsalgorithmus darauf an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 1 & -2 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1+2\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz (2.32) gilt also

$$U = \operatorname{sp}((1,0,\mathrm{i},-1),(0,1,-1,1+2\mathrm{i}),(0,0,0,0)) = \operatorname{sp}((1,0,\mathrm{i},-1),(0,1,-1,1+2\mathrm{i})).$$

Folglich bilden $(1,0,\mathrm{i},-1),(0,1,-1,1+2\mathrm{i})$ ein Erzeugendensystem von U. Da sie aber auch linear unabhängig sind, ist somit $(1,0,\mathrm{i},-1),(0,1,-1,1+2\mathrm{i})$ eine Basis von U.