Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 11.12.2007, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 08

Aufgabe 30 (Vektorräume über endlichen Körpern).

(a) Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Wieviele Elemente besitzt V?

(b) Es sei L ein endlicher Körper und $K \subset L$ ein Unterkörper mit q Elementen. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente von L eine Potenz von q ist.

Aufgabe 31 (Basis der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems). Es sei $U \subset \mathbb{R}^5$ der Untervektorraum, der sich als Lösungsmenge des folgenden homogenen linearen Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & & & - & x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & & & + & 10x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
-2x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0
\end{array}$$

Bestimmen Sie eine Basis von U sowie eine Basis eines Komplementärraums W zu U in $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 32 (Untervektorraumoperationen). Es sei V ein Vektorraum und es seien $U, W, X \subset V$ Untervektorräume von V.

(a) Welche der Mengen $U \cap W$, $U \cup W$, $U \setminus W$, $v + U$ und $\lambda U + \mu W$ für $v \in V$, $\lambda, \mu \in K$ sind Untervektorräume von V?

(b) Zeigen Sie, dass $U + W = U$ genau dann gilt, wenn $W \subset U$ ist.

(c) Zeigen Sie: Ist $X \subset U$, so gilt $U \cap (W + X) = (U \cap W) + X$.

(d) Gelten allgemein die Beziehungen $U \cap (W + X) = (U \cap W) + (U \cap X)$ und $U + (W \cap X) = (U + W) \cap (U + X)$?

Aufgabe 33 (direkte Summe und Basen).

(a) Es seien U und W Untervektorräume von V und es seien $a_1, \ldots, a_k$ bzw. $c_1, \ldots, c_l$ Basen von U bzw. W, wobei $k, l \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$ genau dann gilt, wenn $a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_l$ eine Basis von V ist.

(b) Es seien $a_1, a_2, a_3, a_4, c_1, c_2 \in \mathbb{F}_7^5$ gegeben durch

$$a_1 := (\overline{6}, \overline{-1}, \overline{4}, \overline{-3}, \overline{2}), a_2 := (\overline{2}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{-5}, \overline{4}), a_3 := (\overline{4}, \overline{5}, \overline{-4}, \overline{2}, \overline{5}), a_4 := (\overline{5}, \overline{3}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{4})$$

und

$$c_1 := (\overline{3}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{1}), c_2 := (\overline{5}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{-3}).$$

Ist $\mathbb{F}_7^5$ eine direkte Summe der Unterräume $U := \mathrm{sp}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ und $W := \mathrm{sp}(c_1, c_2)$?