Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
13.12.2007

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 08

Musteraufgabe 13 (direkte Summe von Untervektorräumen)**.** Es sei V ein Vektorraum und $\mathcal{U}$ eine Menge von Untervektorräumen von V. Wir definieren die *Summe* der Untervektorräume aus $\mathcal{U}$ durch

$$\sum \mathcal{U} := \sum_{U \in \mathcal{U}} U := \{\sum_{U \in \mathcal{U}} v_U \mid v_U \in U \text{ für alle } U \in \mathcal{U} \text{ und } v_U = 0 \text{ für fast alle } U \in \mathcal{U}\}$$

Die Sprechweise $v_U = 0$ *für fast alle* $U \in \mathcal{U}$ bedeutet hierbei, dass $v_U \neq 0$ nur für endlich viele $U \in \mathcal{U}$ gilt. (Sie ist also nur vonnöten, falls $\mathcal{U}$ unendlich ist, ansonsten hat man keine Einschränkung.)
Zeigen Sie:

(a) Es ist $\sum_{U \in \mathcal{U}} U$ ein Untervektorraum von V.

(b) Es ist $\sum_{U \in \mathcal{U}} U = \operatorname{sp}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U)$.

(c) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

  (i) Für jedes $v \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$ ist die Darstellung als $v = \sum_{U \in \mathcal{U}} v_U$ mit $v_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ eindeutig.

  (ii) Sind für alle $U \in \mathcal{U}$ Vektoren $v_U \in U$ mit $\sum_{U \in \mathcal{U}} v_U = 0$ und $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ gegeben, so folgt $v_U = 0$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

  (iii) Es ist $U \cap \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} U = \{0\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Gilt eine der äquivalenten Bedingungen aus (c), so sagen wir, die Summe $\sum_{U \in \mathcal{U}} U$ ist *direkt* und schreiben

$$\bigoplus \mathcal{U} := \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} U := \sum_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Ist $V = \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} U$, so sagen wir, dass V in eine (*innere*) *direkte Summe* der Untervektorräume aus $\mathcal{U}$ zerfällt.

Lösung.

(a) Wegen $0 = \sum_{U \in \mathcal{U}} 0$ und $0 \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ ist $0 \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$ und damit $\sum_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset$. Es seien nun $v, v' \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$ und $\lambda \in K$ gegeben. Dann gibt es $v_U, v'_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ mit $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ und $v'_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$, so dass $v = \sum_{U \in \mathcal{U}} v_U$ und $v' = \sum_{U \in \mathcal{U}} v'_U$. Dann erhalten wir aber

$$\lambda v + v' = \lambda \sum_{U \in \mathcal{U}} v_U + \sum_{U \in \mathcal{U}} v'_U = \sum_{U \in \mathcal{U}} (\lambda v_U + v'_U)$$

und da $\lambda v_U + v'_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ ist, folgt $\lambda v + v' \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$.

(b) Es sei zunächst ein Vektor $v \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$ gegeben und es seien $v_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ mit $v = \sum_{U \in \mathcal{U}} v_U$ und $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$. Dann ist $v_U \in U \subset \bigcup_{U' \in \mathcal{U}} U' \subset \operatorname{sp}(\bigcup_{U' \in \mathcal{U}} U')$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und da $\operatorname{sp}(\bigcup_{U' \in \mathcal{U}} U')$ ein Untervektorraum von V ist, folgt $v = \sum_{U \in \mathcal{U}} v_U \in \operatorname{sp}(\bigcup_{U' \in \mathcal{U}} U')$. Da $v \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$ beliebig gewählt war, erhalten wir $\sum_{U \in \mathcal{U}} U \subset \operatorname{sp}(\bigcup_{U' \in \mathcal{U}} U') = \operatorname{sp}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U)$.

Umgekehrt gilt $U \subset \sum_{U' \in \mathcal{U}} U'$ für alle $U \in \mathcal{U}$, denn jedes $u \in U$ lässt sich schreiben als $u = u + \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} 0$ und es ist $0 \in U'$ für alle $U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}$. Mit $U \subset \sum_{U' \in \mathcal{U}} U'$ für alle $U \in \mathcal{U}$ ist aber auch $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subset \sum_{U' \in \mathcal{U}} U' = \sum_{U \in \mathcal{U}} U$. Nach (a) ist $\sum_{U \in \mathcal{U}} U$ also ein Untervektorraum von V, der $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ enthält. Damit ist aber auch $\operatorname{sp}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) \subset \sum_{U \in \mathcal{U}} U$, denn $\operatorname{sp}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U)$ ist der bzgl. $\subset$ kleinste Untervektorraum von V, welcher $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ enthält.

Insgesamt haben wir also $\sum_{U \in \mathcal{U}} U = \operatorname{sp}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U)$ gezeigt.

(c) Ist jeder Vektor $v \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$ eindeutig als Summe $v = \sum_{U \in \mathcal{U}} v_U$ mit $v_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ darstellbar, so insbesondere auch der Nullvektor. Dieser hat aber stets die triviale Darstellung $0 = \sum_{U \in \mathcal{U}} 0$, denn es ist $0 \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Sind also $v_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ mit $\sum_{U \in \mathcal{U}} v_U = 0$ und $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ gegeben, so folgt $v_U = 0$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Als nächstes sei angenommen, dass aus $\sum_{U \in \mathcal{U}} v_U = 0$ mit $v_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ stets folgt, dass $v_U = 0$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Ferner sei $U \in \mathcal{U}$ und ein $v \in U \cap \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} U'$ gegeben. Wegen $v \in \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} U'$ gibt es dann $v_{U'} \in U'$ für alle $U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}$ mit $v = \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} v_{U'}$ und $v_{U'} = 0$ für fast alle $U' \in \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} U'$. Es folgt $v + \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} (-v_{U'}) = v - \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} v_{U'} = 0$, nach unserer Voraussetzung also $v = 0$ und $-v_{U'} = 0$ für alle $U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}$. Insbesondere ist aber $v = 0$ und damit $U \cap \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} = \{0\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Schließlich sei vorausgesetzt, dass $U \cap \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} U' = \{0\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt und es sei ein Vektor $v \in \sum_{U \in \mathcal{U}} U$ gegeben. Weiter seien $v_U, v'_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ mit $v = \sum_{U \in \mathcal{U}} v_U = \sum_{U \in \mathcal{U}} v'_U$ und $v_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$ sowie $v'_U = 0$ für fast alle $U \in \mathcal{U}$. Dann folgt $v_U - v'_U = \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} (v'_{U'} - v_{U'}) \in U \cap \sum_{U' \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} U' = \{0\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$, also $v_U - v'_U = 0$ bzw. $v_U = v'_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$.