Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 18.12.2007, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 09

Aufgabe 34 (Zeilen- und Spaltenrang)**.** Bestimmen Sie den Zeilen- und Spaltenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in K^{(3,3)},$$

wobei $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{11}, \mathbb{F}_{13}\}$.

Aufgabe 35 (affine Unterräume)**.** Es sei V ein Vektorraum, U und U' Untervektorräume von V, $v, v' \in V$ Vektoren und $T := v + U$ sowie $T' := v' + U'$ affine Unterräume von V. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es ist $T = T'$ genau dann, wenn $v = v'$ und $U = U'$ gilt.

(b) Es ist $T = T'$ genau dann, wenn $v' - v \in U$ und $U = U'$ gilt.

(c) Es ist $T \cap T' \neq \emptyset$ genau dann, wenn $v' - v \in U + U'$ ist.

Aufgabe 36 (Beispiele und Gegenbeispiele für lineare Abbildungen)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear zwischen den angegebenen K-Vektorräumen sind.

(a) Die Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_4)$, über $K = \mathbb{R}$.

(b) Die Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_2 + \mathrm{i}x_4, -x_1, (3 - 2\mathrm{i})x_3 + x_4)$, über $K = \mathbb{C}$.

(c) Die Abbildung $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 1, x_1)$, über $K = \mathbb{Q}$.

(d) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^1, x \mapsto (x\sqrt{2})$, über $K = \mathbb{R}$.

(e) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, über $K = \mathbb{R}$.

(f) Die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$, über $K = \mathbb{F}_2$.

(g) Die Abbildung $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1x_2, x_1 + x_2)$, über $K = \mathbb{Q}$.

(h) Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$, über $K = \mathbb{C}$.

(i) Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$, über $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 37 (eine Einbettung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^\mathbb{R}$)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die Polynomfunktionen f_0, f_1, f_2 definiert durch $f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^i$, für $i \in \{0, 1, 2\}$, linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.

(b) Rechnen Sie nach, dass $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ definiert durch $(L(a_0, a_1, a_2))(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, eine injektive lineare Abbildung über $\mathbb{R}$ ist.

(c) Nach Aufgabe 13 (a) gibt es auf Grund der Injektivität von L eine Abbildung $g \colon \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $g \circ L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Bestimmen Sie nun eine $\mathbb{R}$-*lineare* Abbildung $M \colon \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.