Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
20.12.2007

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 09

Musteraufgabe 14 (Beispiel für eine unendliche direkte Summe)**.** Es sei M eine Menge und K ein Körper. Für jedes $m \in M$ definieren wir eine Abbildung $\mathrm{e}_m \colon M \to K, m' \mapsto \delta_{m,m'}$. Ferner setzen wir $\mathcal{U} := \{\mathrm{sp}(\mathrm{e}_m) \mid m \in M\}$ und $W := \sum_{U \in \mathcal{U}} U = \sum_{m \in M} \mathrm{sp}(\mathrm{e}_m)$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $W = \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} U = \bigoplus_{m \in M} \mathrm{sp}(\mathrm{e}_m)$.

(b) Falls M unendlich ist, gilt $W \neq K^M$.

Lösung.

(a) Es seien Vektoren $u_m \in \mathrm{sp}(\mathrm{e}_m)$ mit $\sum_{m \in M} u_m = 0$ und $u_m = 0$ für fast alle $m \in M$ gegeben. Dann gibt es für jedes $m \in M$ ein $\lambda_m \in K$ mit $u_m = \lambda_m \mathrm{e}_m$, und da $u_m = 0$ für fast alle $m \in M$ und $\mathrm{e}_m \neq 0$ für alle $m \in M$ ist, haben wir $\lambda_m = 0$ für fast alle $m \in M$. Folglich haben wir $\sum_{m \in M} \lambda_m \mathrm{e}_m = \sum_{m \in M} u_m = 0$ mit $\lambda_m = 0$ für fast alle $m \in M$. Da nach Übungsblatt 7, Aufgabe 29, aber jedes Vektorsystem bestehend aus endlich vielen Vektoren aus $\{\mathrm{e}_m \mid m \in M\}$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_m = 0$ und damit $u_m = 0\mathrm{e}_m = 0$ für alle $m \in M$. Nach Musteraufgabe 13 ist also $W = \bigoplus_{m \in M} \mathrm{sp}(\mathrm{e}_m)$.

(b) Für die Abbildung $f \colon M \to K, m \mapsto 1$, gilt $f \in K^M$, aber $f \notin W$ falls M unendlich ist.

Musteraufgabe 15 (lineare Abbildungen und Vektorsysteme)**.** Es seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^3$ und $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$a_1 := (-2, 2, 0), a_2 := (0, 1, -1), a_3 := (0, 3, 0), a_4 := (-2, 0, 2)$$

und

$$b_1 := (2, 1), b_2 := (2, 3), b_3 := (0, 1).$$

Entscheiden Sie im Folgenden jeweils, ob es eine lineare Abbildung $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit den angeforderten Eigenschaften gibt, und bestimmen Sie in den Fällen, in denen L existiert und eindeutig bestimmt ist, Basen von Bild und Kern von L.

(a) Gibt es eine lineare Abbildung L mit $L(a_1) = b_1$, $L(a_2) = b_2$, $L(a_3) = b_3$?

(b) Gibt es eine lineare Abbildung L mit $L(a_1) = b_3$, $L(a_2) = b_2$, $L(a_4) = b_1$?

(c) Gibt es eine lineare Abbildung L mit $L(a_1) = b_2$, $L(a_2) = b_3$, $L(a_4) = b_1$?

Lösung.

(a) Da a_1, a_2, a_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, gibt es nach (3.8) eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(a_1) = b_1$, $L(a_2) = b_2$, $L(a_3) = b_3$. Das Bild von L ist

$$\mathrm{Bild}\, L = L(\mathbb{R}^3) = L(\mathrm{sp}(a_1, a_2, a_3)) = \mathrm{sp}(L(a_1), L(a_2), L(a_3)) = \mathrm{sp}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^2,$$

also ist eine Basis von $\mathrm{Bild}\, L$ etwa durch $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ gegeben. Es sei nun $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \in \mathrm{Kern}\, L$ ein beliebiges Element im Kern von L. Dann ist

$$0 = L(x) = \lambda_1 L(a_1) + \lambda_2 L(a_2) + \lambda_3 L(a_3) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \lambda_1(2, 1) + \lambda_2(2, 3) + \lambda_3(0, 1),$$

d.h. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ist eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels Gaußschem Eliminierungsalgorithmus' berechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems gegeben durch

$$\mathbb{L} = \mathrm{sp}((\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)) = \mathrm{sp}((1, -1, 2))$$

und damit

$$\mathrm{Kern}\, L = \mathrm{sp}(a_1 - a_2 + 2a_3) = \mathrm{sp}((-2, 7, 1)).$$

Da $(-2, 7, 1)$ auch linear unabhängig ist, handelt es sich um eine Basis von Kern L.

(b) Es ist a_1, a_2, a_4 linear abhängig mit $a_1 - 2a_2 - a_4 = 0$. Angenommen, es gibt eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(a_1) = b_3$, $L(a_2) = b_2$, $L(a_4) = b_1$. Dann folgt

$$0 = L(0) = L(a_1 - 2a_2 - a_4) = L(a_1) - 2L(a_2) - L(a_4) = b_3 - 2b_2 - b_1 = (-6, -6)$$

und wir erhalten einen Widerspruch. Somit kann es keine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(a_1) = b_3$, $L(a_2) = b_2$, $L(a_4) = b_1$ geben.

(c) Wir ergänzen das linear unabhängige Vektorsystem a_1, a_2 zu einer Basis a_1, a_2, a von $\mathbb{R}^3$. Dann existiert nach (3.8) zu jedem $b \in \mathbb{R}^2$ genau eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(a_1) = b_2$, $L(a_2) = b_3$, $L(a) = b$, und für jede solche lineare Abbildung folgt

$$L(a_4) = L(a_1 - 2a_2) = L(a_1) - 2L(a_2) = b_2 - 2b_3 = b_1.$$

Folglich existiert eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(a_1) = b_2$, $L(a_2) = b_3$, $L(a_4) = b_1$, jedoch ist diese nicht eindeutig bestimmt.