Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 08.01.2008, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 10

Aufgabe 38 (lineare Abbildungen und Untervektorräume). Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist U ein Untervektorraum von V, so ist $L(U)$ ein Untervektorraum von W.

(b) Ist X ein Untervektorraum von W, so ist $L^{-1}(X) = \{v \in V \mid L(v) \in X\}$ ein Untervektorraum von V.

(c) Für Untervektorräume U und U' von V gilt $L(U + U') = L(U) + L(U')$.

(d) Für $v_1, \ldots, v_k \in V$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist $L(\operatorname{sp}(v_1, \ldots, v_k)) = \operatorname{sp}(L(v_1), \ldots, L(v_k))$.

Aufgabe 39 (lineare Abbildungen und Vektorsysteme). Es seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}^4$ und $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$a_1 := (1,1,0,0), a_2 := (3,4,0,-1), a_3 := (0,0,2,1), a_4 := (0,1,2,0), a_5 := (-2,1,1,1)$$

und

$$b_1 := (0,1,0), b_2 := (1,1,-1), b_3 := (2,2,3), b_4 := (1,-1,-1), b_5 := (1,6,4).$$

Entscheiden Sie im Folgenden jeweils, ob es eine lineare Abbildung L mit den angeforderten Eigenschaften gibt, und bestimmen Sie in den Fällen, in denen L existiert und eindeutig bestimmt ist, Basen von Bild und Kern von L.

(a) Gibt es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $L(a_1) = b_1$, $L(a_2) = b_2$, $L(a_3) = b_3$, $L(a_4) = b_4$?

(b) Gibt es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $L(b_1) = a_1$, $L(b_2) = a_2$, $L(b_3) = a_3$?

(c) Gibt es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $L(a_1) = b_1$, $L(a_2) = b_4$, $L(a_3) = b_5$, $L(a_4) = b_3$?

(d) Gibt es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $L(a_1) = a_5$, $L(a_5) = a_1$?

(e) Gibt es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $L(b_1) = b_2$, $L(b_2) = b_1$, $L(b_3) = b_4$?

Aufgabe 40 (Satz von Zassenhaus). Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es seien U und W Untervektorräume von V. Mittels komponentenweiser Operationen wird $V \times V$ ebenfalls zu einem K-Vektorraum. Wir definieren Abbildungen $\iota_1\colon V \to V \times V, v \mapsto (v, 0)$, und $\Delta\colon V \to V \times V, v \mapsto (v, v)$, sowie $X := \iota_1(U) + \Delta(W)$.

(a) Zeigen Sie, dass ι_1 und Δ lineare Abbildungen über K sind.

(b) Folgern Sie, dass die Menge X ein Untervektorraum von $V \times V$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L\colon X \to V, (x_1, x_2) \mapsto x_1$, linear ist, und bestimmen Sie $\operatorname{Kern} L$ und $\operatorname{Bild} L$.

Aufgabe 41 (Polynomring). Es sei K ein Körper. Wir betrachten

$$K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0} = \{p \in K^{\mathbb{N}_0} \mid p(k) = 0 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}_0\}$$

und schreiben für ein Element $p \in K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$ auch $p_k := p(k)$ für die Auswertung von p an einem Element $k \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir außerdem eine Abbildung $X^k\colon \mathbb{N}_0 \to K, l \mapsto \delta_{k,l}$, wobei das sogenannte *Kronecker-Delta* $\delta_{k,l}$ gegeben ist durch

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{falls } l = k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) Bzgl. argumentweise definierter Verknüpfungen ist $K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$ ein K-Vektorraum.

(b) Zeigen Sie, dass sich jedes Element $p \in K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$ auf eindeutige Weise darstellen lässt als $p = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_k X^k$ mit $p_k \in K$ und $p_k = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}_0$.