

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I Musteraufgabenblatt 10

Musteraufgabe 16 (Darstellung einer affinen Ebene). Es sei durch

$$E = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{sp} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

eine affine Ebene in $\mathbb{R}^{(1,4)}$ gegeben. Stellen Sie E als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems dar, d.h. bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{(4,p)}$, $b \in \mathbb{R}^{(1,p)}$ mit $E = \{x \in \mathbb{R}^{(1,4)} \mid Ax = b\}$, wobei $p \in \mathbb{N}$.

Lösung. Wir folgen dem Beweis von (4.20) (und (4.23)). Es sei

$$U := \text{sp} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right) \text{ und } x_0 := \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen durch elementare Umformungen zunächst eine Basis von U :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $U = \text{sp}(v_1, v_2)$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

und v_1, v_2 ist eine Basis von U . Wir ergänzen v_1, v_2 durch

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis von $\mathbb{R}^{(1,4)}$. Um U als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems darzustellen, definieren wir nun eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^{(1,4)} \rightarrow \mathbb{R}^{(1,2)}$ auf der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 durch

$$L(v_1) := 0, L(v_2) := 0, L(v_3) := e_1, L(v_4) := e_2.$$

Die Darstellungsmatrix A von L bzgl. v_1, v_2, v_3, v_4 und e_1, e_2 ist also gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet nun \tilde{A} die Darstellungsmatrix von L bzgl. der Standardbasen e_1, e_2, e_3, e_4 und e_1, e_2 , so gilt $L(x) = \tilde{A}x$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$, insbesondere ist also $x \in \text{Kern } L = U$ genau dann, wenn $\tilde{A}x = 0$ gilt, d.h. wenn x in der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix \tilde{A} ist. Um \tilde{A} zu berechnen, führen wir nun einen Basiswechsel durch. Die Darstellungsmatrix T der Koordinatentransformation zum Basiswechsel von v_1, v_2, v_3, v_4 nach e_1, e_2, e_3, e_4 ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Inverse von T :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\tilde{A} = AT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist ferner

$$b := \tilde{A}x_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 41 \end{pmatrix}$$

und daher T die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -9 \\ 41 \end{pmatrix}.$$