Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 08.01.2008, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 11
(Weihnachtsübungsblatt)

Hinweis: Dieses Übungsblatt ist freiwillig, für die richtige Bearbeitung können aber pro Aufgabe zusätzliche vier Punkte verdient werden. Die Punkte, die Sie durch die Bearbeitung dieses Übungsblatts erreichen, werden Ihnen angerechnet, zählen aber nicht zu der maximal erreichbaren Punktzahl, von der Sie für die Klausurzulassung 50 % benötigen.

Zusatzaufgabe 42 (Polynomring)**.** Es sei K ein Körper. Wir definieren auf $K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$ eine Multiplikation $\cdot$, wobei

$$(pq)_k := \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}_0\\ i+j=k}}^{k} p_i q_j \text{ für alle } p, q \in K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Man nennt $\cdot$ auch *Faltung* auf $K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Faltung eine wohldefinierte Verknüpfung auf $K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$ bildet und dass $K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$ mit der komponentenweisen Addition und der Faltung als Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselement bildet.

(d) Zeigen Sie, dass mit dieser Multiplikation $X^m X^n = X^{m+n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei X^n für $n \in \mathbb{N}_0$ wie in Aufgabe 41 definiert sei.

Man nennt $K_{\mathrm{e}}^{\mathbb{N}_0}$ zusammen mit der Addition und Multiplikation den *Polynomring* über K und bezeichnet diesen als $K[X]$. Die Elemente von $K[X]$ werden als *Polynome* über K in der *Unbestimmten* X bezeichnet. Für ein nicht-triviales Polynom $p \in K[X] \setminus \{0\}$ nennt man $\deg p := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid p_k \neq 0\}$ den *Grad* von p.

(e) Zeigen Sie, dass

$$K[X]_{\leq n} := \{p \in K[X] \mid \deg p \leq n\} \cup \{0\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein Untervektorraum von $K[X]$ ist. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $K[X]_{\leq n}$.

(f) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Abbildungen linear sind:

$$D\colon K[X] \to K[X], p \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} k p_k X^{k-1},$$
$$S\colon K[X] \to K, p \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k,$$
$$E\colon K[X] \to K[X], p \mapsto 1.$$

Zusatzaufgabe 43 (Freiheit von endlich-dimensionalen Vektorräumen)**.** Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie, dass es eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ gibt, welche folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Zu jeder Abbildung $f\colon \mathcal{B} \to W$ in einen K-Vektorraum W gibt es genau eine lineare Abbildung $L\colon V \to W$ mit $L|_{\mathcal{B}} = f$.

Zusatzaufgabe 44 (lineare Codes)**.** Es sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Ein *linearer Code* der *Länge* n über $\mathbb{F}_p$ ist ein Untervektorraum C von $\mathbb{F}_p^n$; die Elemente von C werden *Codewörter* genannt. Das *Gewicht* eines Elements $c \in C$ ist definiert durch

$$\mathrm{w}(c) := |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid c_i \neq 0\}|$$

und der *Minimalabstand* von C als

$$\mathrm{d}_{\min}(C) := \min\{\mathrm{w}(c) \mid c \in C \setminus \{0\}\}.$$

(a) Überprüfen Sie in den folgenden Beispielen, ob $C \subset \mathbb{F}_p^n$ ein linearer Code ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Dimension und die Anzahl der Elemente von C.

(i) Es sei $C := \{x \in \mathbb{F}_p^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\}$.

(ii) Es sei $C := \{x \in \mathbb{F}_p^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n^2\}$.

(iii) Es sei $C := \{x \in \mathbb{F}_p^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.

(iv) Es sei $C := \{x \in \mathbb{F}_p^n \mid \prod_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\}$.

(v) Es sei $C := \{\lambda(1, \dots, 1) \in \mathbb{F}_p^n \mid \lambda \in \mathbb{F}_p\}$.

(vi) Es sei $C := \{x \in \mathbb{F}_p^7 \mid x_3 + x_5 + x_6 + x_7 = x_2 + x_4 + x_6 + x_7 = x_1 + x_4 + x_5 + x_7 = 0\}$.

(b) Es sei C ein linearer Code der Länge n über $\mathbb{F}_p$. Zeigen Sie, dass sich je zwei verschiedene Codewörter in C an mindestens $\mathrm{d}_{\min}(C)$ Koordinaten voneinander unterscheiden.

(c) Bestimmen Sie den Minimalabstand der linearen Codes aus (a).

Wir wünschen euch
schöne Weihnachtsfeiertage
und einen guten Rutsch ins Jahr 2008!