Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
31.01.2008

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Musteraufgabenblatt 11

Musteraufgabe 17 (Sphäre als Faktorgruppe)**.** Wir betrachten die additive Gruppe des Körpers $\mathbb{R}$ sowie die multiplikative Gruppe $\mathrm{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist.

Lösung. Wegen $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x+2\pi\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times, x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$, ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe des Körpers $\mathbb{R}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ des Körpers $\mathbb{C}$. Aus der Polardarstellung für komplexe Zahlen folgt

$$\operatorname{Bild} f = \{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \mathrm{S}^1,$$

außerdem ist

$$\operatorname{Kern} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x} = 1\} = \mathbb{Z}.$$

Mit dem Homomorphiesatz erhalten wir nun

$$\mathrm{S}^1 = \operatorname{Bild} f \cong \mathbb{R}/(\operatorname{Kern} f) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Musteraufgabe 18 (erster Noetherscher Isomorphiesatz)**.** Es sei V ein Vektorraum und es seien U und W Untervektorräume von V. Zeigen Sie: Es gilt

$$(U + W)/U \cong W/(U \cap W).$$

Lösung. Wir betrachten die lineare Abbildung $L\colon W \to (U + W)/U, w \mapsto w + U$. Es ist

$$\operatorname{Kern} L = \{w \in W \mid L(w) = 0\} = \{w \in W \mid w + U = 0\} = \{w \in W \mid w \in U\} = U \cap W$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild} L &= \{L(w) \mid w \in W\} = \{w + U \mid w \in W\} = \{u + w + U \mid u \in U, w \in W\} \\ &= \{v + U \mid v = u + w, \text{ wobei } u \in U, w \in W\} = (U + W)/U,\end{aligned}$$

mit dem Homomorphiesatz folgt also

$$(U + W)/U = \operatorname{Bild} L \cong W/(\operatorname{Kern} L) = W/(U \cap W).$$