Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 15.01.2008, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 12

Aufgabe 45 (Zassenhaus-Algorithmus). Es sei K ein Körper.

(a) Es seien $k, l, n \in \mathbb{N}$ mit $k, l \leq n$ und Untervektorräume $U, W \subset K^n$ gegeben durch $U = \operatorname{sp}(u_1, \ldots, u_k)$, $W = \operatorname{sp}(w_1, \ldots, w_l)$, wobei $u_i \in U$, $w_j \in W$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$. Wir schreiben die Erzeugendensysteme von U und W wie folgt in eine Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ u_k & 0 \\ w_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_l & w_l \end{pmatrix} \in K^{(2n,k+l)}.$$

Es seien nun $v_1, \ldots, v_{k+l} \in K^n$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, gegeben, so dass

$$B := \begin{pmatrix} v_1 & * \\ \vdots & \vdots \\ v_m & * \\ 0 & v_{m+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & v_{k+l} \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen aus A hervorgeht. Zeigen Sie:

(i) Es ist $U + W = \operatorname{sp}(v_1, \ldots, v_m)$ und $U \cap W = \operatorname{sp}(v_{m+1}, \ldots, v_{k+l})$.

(ii) Falls B eine Matrix in Zeilenstufenform ist, so ist $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von $U + W$. Falls $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U und $w_1, \ldots, w_l$ eine Basis von W ist, so ist $v_{m+1}, \ldots, v_{k+l}$ eine Basis von $U \cap W$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 40.

(b) Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \operatorname{sp}((0,1,0,-1),(1,0,1,-2),(-1,-2,0,1)) \text{ und } W = \operatorname{sp}((-1,0,1,0),(1,0,-1,-1),(2,0,-1,0))$$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des in (a) dargestellten Verfahrens Basen für $U + W$ und $U \cap W$.

Aufgabe 46 (Darstellungsmatrizen von linearen Abbildungen).

(a) Es sei K ein Körper. Wählen Sie zur linearen Abbildung L in den folgenden Fällen je eine Basis von Definitions- und Zielbereich und berechnen Sie bzgl. dieser Basen die Darstellungsmatrix von L. Berechnen Sie ferner mit Hilfe der Darstellungsmatrix Basen von $\operatorname{Kern} L$ und $\operatorname{Bild} L$. Ist L injektiv bzw. surjektiv?

(i) Es sei $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, 0)$.

(ii) Es sei $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (y-x, 0, x-y)$.

(iii) Es sei $L\colon K[X]_{\leq 5} \to K, p \mapsto \sum_{k=0}^{5} p_k$.

(iv) Es sei $L\colon K[X]_{\leq 6} \to K[X]_{\leq 5}, p \mapsto \sum_{k=0}^{5} (k+1) p_{k+1} X^k$.

(b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,3)}.$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von $L\colon \mathbb{R}^{(1,4)} \to \mathbb{R}^{(1,3)}, x \mapsto Ax$, bzgl. der Basen a_1, a_2, a_3, a_4 von $\mathbb{R}^{(1,4)}$ und b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^{(1,3)}$, wobei

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\\-8\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix} \text{ und } b_1 = \begin{pmatrix}5\\-6\\7\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}-3\\4\\-4\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 47 (nilpotente Matrizen)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Man nennt eine Matrix $R \in K^{(n,n)}$ eine *strikte obere Dreiecksmatrix*, wenn $R_{i,j} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \geq j$ gilt. Eine Matrix $N \in K^{(n,n)}$ heißt *nilpotent*, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $N^k = 0$ ist. In diesem Fall heißt $\min\{k \in \mathbb{N} \mid N^k = 0\}$ der *Nilpotenzindex* von N.

(a) Zeigen Sie, dass eine strikte obere Dreiecksmatrix $R \in K^{(4,4)}$ nilpotent von einem Nilpotenzindex kleiner oder gleich 4 ist. Unter welchen Bedingungen an die Einträge $R_{i,j}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$ ist der Nilpotenzindex 2 bzw. 3?

(b) Berechnen Sie L^{2008}, wobei $L \in K^{(4,4)}$ gegeben sei durch

$$L := \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0 & 0\\ b & c & 0 & 0\\ -1 & d & e & 0\end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d, e \in K.$$

(c) Berechnen Sie A^{2008}, wobei $A \in K^{(3,3)}$ gegeben sei durch

$$A := \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in K.$$

Aufgabe 48 (Matrixkalkül)**.**

(a) Gegeben seien die rationalen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}1 & -3 & 7 & -2\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\\ 4 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Finden Sie alle wohldefinierten Produkte der gegebenen Matrizen als Ausdrücke in A, B, C, D, E, so dass folgende Zusatzbedingung erfüllt ist: In keinem Produkt darf eine Einheitsmatrix oder Nullmatrix als echtes Unterprodukt vorkommen. Bestimmen Sie hierunter das Produkt mit der größtmöglichen Anzahl an Faktoren und, falls diese Matrix nilpotent ist, ihren Nilpotenzindex.

(b) Gegeben seien die rationalen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & -7\\ 2 & 3 & -4 & 5\\ -3 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix}5 & 6 & 4\\ -29 & -9 & -28\\ 22 & 26 & 20\\ -5 & -10 & -8\end{pmatrix}.$$

(i) Untersuchen Sie die Matrix A auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie ggf. ihr Inverses.

(ii) Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{Q}^{4\times 3}$ mit $AX = B$.