Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 22.01.2008, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 13

Aufgabe 49 (Basiswechsel)**.** Es seien mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{b}_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \tilde{b}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{c}_1 := \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{c}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{c}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Basen in den reellen Vektorräumen $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ gegeben. Ferner sei eine lineare Abbildung

$$L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

gegeben.

(a) Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix A von L bzgl. der Basen b_1, b_2 und c_1, c_2, c_3.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen T bzw. U der Koordinatentransformationen zum Basiswechsel von b_1, b_2 zu $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ bzw. von c_1, c_2, c_3 zu $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$.

(c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von L bzgl. der Basen $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ und $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$.

Aufgabe 50 (Rechnen mit linearen Abbildungen in abstrakten Vektorräumen)**.** Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und es seien b_1, b_2, b_3 eine Basis von V und c_1, c_2, c_3, c_4 eine Basis von W. Ferner sei $L \colon V \to W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$L(b_1) = -2c_1 + c_3 + 2c_4, L(b_2) = c_2 + c_3 + c_4, L(b_3) = -2c_1 - c_2 + c_4.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von L bzgl. der Basen b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3, c_4.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektorsysteme $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ bzw. $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4$ definiert durch

$$\tilde{b}_1 := b_1, \tilde{b}_2 := -b_1 + b_2, \tilde{b}_3 := -b_1 + b_2 + b_3$$

bzw.

$$\tilde{c}_1 := -2c_1 + c_3 + 2c_4, \tilde{c}_2 := 2c_1 + c_2 - c_4, \tilde{c}_3 := c_1, \tilde{c}_4 := c_4$$

Basen von V bzw. W bilden.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von L bzgl. der Basen $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ und $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4$.

Aufgabe 51 (Potenzen einer Matrix)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Wir betrachten die Matrix $A = (a_{i,j}) \in K^{(n,n)}$ mit $a_{i,j} = \delta_{i+1,j}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Bestimmen Sie A^k für $k \in \{0, \ldots, n\}$. Benutzen Sie vollständige Induktion nach k.

Aufgabe 52 (Hamiltonsche Quaternionen)**.** Es seien $E, I, J, K \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ definiert durch

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die von den Elementen I und J erzeugte Untergruppe Q in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

(b) Wir betrachten die Teilmenge

$$H := \{aE + bI + cJ + dK \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^{(2,2)}.$$

Zeigen Sie, dass H mit der in $\mathbb{C}^{(2,2)}$ definierten Addition und Multiplikation einen Schiefkörper bildet. Man nennt ihn den (*Hamiltonschen*) *Quaternionenschiefkörper*.