Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 29.01.2008, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 14

Aufgabe 53 (Basen zur Darstellungsmatrix gesucht)**.** Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{Q}$ und es seien b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis von V und c_1, c_2, c_3 eine Basis von W. Ferner sei $L\colon V \to W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, deren Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{Q}^{(4,3)}$ bzgl. b_1, b_2, b_3, b_4 und c_1, c_2, c_3 gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{Q}^{(4,3)}$ gegeben durch

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Gibt es Basen $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4$ von V und $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ von W, so dass $\tilde{A}$ die Darstellungsmatrix von L bzgl. $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4$ und $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ ist? Falls ja, bestimmen Sie solche Basen.

Aufgabe 54 (Signum von Permutationen)**.**

(a) Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen:

$$(1,4,2), (1,4,9,12)(2,7,3,5)(6,11,10,8), (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,6),$$
$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Bestimmen Sie alle Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_4$ mit $\operatorname{sign} \pi = 1$. Welchen Bewegungen des Tetraeders entsprechen diesen Permutationen, wenn man sie als Permutationen der Ecken betrachtet (vgl. Aufgabe 12)?

Aufgabe 55 (Konjugationsautomorphismus)**.** Es sei G eine Gruppe. Wir setzen $\operatorname{Aut} G := \{\alpha \in G^G \mid \alpha \text{ Automorphismus}\}$ für die Menge der Automorphismen auf G. Zeigen Sie:

(a) Für alle $g \in G$ ist die Abbildung

$$\kappa_g\colon G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$$

ein Gruppenautomorphismus. Man nennt ihn *Konjugationsautomorphismus*.

(b) Die Menge $\operatorname{Aut} G$ bildet bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

(c) Die Abbildung $\kappa\colon G \to \operatorname{Aut} G, g \mapsto \kappa_g$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 56 (Konjugation in der symmetrischen Gruppe)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation. Zeigen Sie, dass der Konjugationsautomorphismus κ_π Zykel auf Zykel abbildet und dabei die Zykellänge erhält, d.h. dass für einen Zykel $\zeta \in \mathfrak{S}_n$ der Länge $l \in \{1, \dots, n\}$ das Element $\kappa_\pi(\zeta) \in \mathfrak{S}_n$ wieder ein Zykel der Länge l ist.