Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2007/08
Abgabe bis Dienstag, 05.02.2008, 14:00 Uhr
Einwurf in die Kästen im Mathefoyer

Lineare Algebra (und analytische Geometrie) I

Übungsblatt 15

Aufgabe 57 (Gruppe der Quadratzahlen)**.**

(a) Es sei K ein Körper und $q\colon K^\times \to K^\times, x \mapsto x^2$, wobei $K^\times = K \setminus \{0\}$ die multiplikative Gruppe von K bezeichne. Ferner bezeichnen wir mit $K^\square$ die Menge der invertierbaren Quadrate in K, d.h.

$$K^\square := \{y \in K^\times \mid \text{es gibt ein } x \in K \text{ mit } y = x^2\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass q ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie Kern und Bild von q.

(ii) Folgern Sie, dass $K^\square$ eine Untergruppe von $K^\times$ ist.

(b) Es sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie $|{\mathbb{F}_p}^\square|$, d.h. die Anzahl der Elemente von ${\mathbb{F}_p}^\times$, aus denen man die Wurzel ziehen kann.

(c) Für welche Primzahlen p ist $-1 \in {\mathbb{F}_p}^\square$? Prüfen Sie zunächst an Hand einiger Beispiele für p, etwa $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, ob $-1 \in {\mathbb{F}_p}^\square$ ist. Stellen Sie danach für $p > 2$ eine Vermutung für ein hinreichendes und notwendiges Kriterium an p auf, welches charakterisieren soll, unter welcher Bedingung an p das Element $-1 \in {\mathbb{F}_p}^\square$ ist (also eine Aussage der Art „es ist $-1 \in {\mathbb{F}_p}^\square$ genau dann, wenn $p \ldots$“). Beweisen Sie von Ihrer Vermutung eine Richtung.

Aufgabe 58 (Zentrum und innere Automorphismen)**.** Ein Automorphismus $\alpha\colon G \to G$ heißt ein *innerer Automorphismus*, falls es ein $g \in G$ gibt mit $\alpha = \kappa_g$, d.h. $\alpha(x) = gxg^{-1}$ für alle $x \in G$. Wir setzen $\operatorname{Inn} G := \{\kappa_g \mid g \in G\}$ für die Menge der inneren Automorphismen auf G. Ferner setzen wir $\mathrm{Z}(G) := \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}$ und nennen dies das *Zentrum* von G. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\mathrm{Z}(G)$ ein Normalteiler von G.

(b) Es ist $\operatorname{Inn} G$ eine Untergruppe von $\operatorname{Aut} G$.

(c) Es ist $\operatorname{Inn} G \cong G/\mathrm{Z}(G)$.

Aufgabe 59 (Dimension eines Quotientenvektorraums)**.**

(a) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass der Quotientenvektorraum V/U auch endlich-dimensional ist und bestimmen Sie die Dimension von V/U in Abhängigkeit von $\dim V$ und $\dim U$.

(b) Es sei $L\colon \mathbb{R}^{(1,5)} \to \mathbb{R}^{(1,5)}, x \mapsto Ax$, gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 10 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^{(1,5)}/(\operatorname{Kern} L)$.

Aufgabe 60 (verallgemeinerter Homomorphiesatz und zweiter Noetherscher Isomorphiesatz)**.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und U ein Untervektorraum von V. Wir bezeichnen mit $\pi_{V,U}\colon V \to V/U, v \mapsto v + U$ die *kanonische Projektion*. Zeigen Sie:

(a) Die kanonische Projektion $\pi_{V,U}$ ist eine surjektive lineare Abbildung mit $\operatorname{Kern} \pi_{V,U} = U$.

(b) Ist W ein K-Vektorraum und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit $U \subset \operatorname{Kern} L$, so existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\overline{L}\colon V/U \to W$ mit $L = \overline{L} \circ \pi_{V,U}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi_{V,U}"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dotted, "\overline{L}"'] & \end{tikzcd}$$

Für die induzierte lineare Abbildung $\overline{L}$ gilt $\operatorname{Bild} \overline{L} = \operatorname{Bild} L$ und $\operatorname{Kern} \overline{L} = (\operatorname{Kern} L)/U$.

(c) Ist W ein Untervektorraum von V mit $U \subset W$, so gilt

$$(V/U)/(W/U) \cong V/W.$$